Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte, že existuje konstanta c splňující následující tvrzení. V každém souboru $S_1, \dots, S_n$ podmnožin množiny $\{1, \cdots, n\}$, kde n je přirozené číslo, splňujícím $|S_i \cap S_j|$ pro všechna i, j taková, že $1 \leq i < j \leq n$, lze nalézt S_i s nejvýše $c\sqrt{n}$ prvky.

Úloha 2: Určete kolik nejvýše průsečíků může mít množina přímek v 3-rozměrném prostoru, pokud víte, že žádné tři přímky z této množiny nemohou ležet v jedné rovině. (Pokud se nám tři nebo více přímek protíná v jednom bodě, počítáme takový průsečík pouze jednou.)

Úloha 3: Dokažte následující variantu Ramseyovy věty: Pro každé n (velikost požadovaného podgrafu) a každé k (počet barev) existuje N takové, že pro libovolnou dvojici obarvení hran c_1, c_2 úplného grafu na N vrcholech (tedy funkce $c_1, c_2 : \binom{\{1,\dots,N\}}{2} \to \{1, \dots, k\}$) existuje úplný podgraf velikosti n, který je jednobarevný jak v obarvení c_1, tak v obarvení c_2.

Úloha 4: Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami, vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.

b) Pro každé přirozené n existuje přirozené N takové, že jsou-li vrcholy úplného grafu K_N obarveny dvěma barvami, potom v uvažovaném grafu je úplný podgraf K_n jehož všechny vrcholy jsou obarveny toutéž barvou.

c) Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené N takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo **doplněk** G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf. (Zmiňovaný podgraf nemusí být indukovaný.)

d) Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené N takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje **doplněk** $K_{n,n}$ jako podgraf. (Zmiňovaný podgraf nemusí být indukovaný.)

Úloha 5: Hrany grafu K_n jsou obarveny červeně a modře. Dokažte, že v tomto grafu najdeme buď modrý trojúhelník nebo červený čtyřcylus pro

a) $k = 9$.

b) $k = 8$.

Úloha 6: Mřížové body v rovině jsou obarveny 2015 barvami. Ukažte, že lze zvolit 2010 řádků a 2010 sloupců tak, že všechny jejich průsečíky mají stejnou barvu. (Mřížové body jsou body, které mají obě souřadnice celočíselné.)

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte, že existuje konstanta c splňující následující tvrzení. V každém souboru $S_1, \dots, S_n$ podmnožin množiny $\{1, \cdots, n\}$, kde n je přirozené číslo, splňujícím $|S_i \cap S_j|$ pro všechna i, j taková, že $1 \leq i < j \leq n$, lze nalézt S_i s nejvýše $c\sqrt{n}$ prvky.

Úloha 2: Určete kolik nejvýše průsečíků může mít množina přímek v 3-rozměrném prostoru, pokud víte, že žádné tři přímky z této množiny nemohou ležet v jedné rovině. (Pokud se nám tři nebo více přímek protíná v jednom bodě, počítáme takový průsečík pouze jednou.)

Úloha 3: Dokažte následující variantu Ramseyovy věty: Pro každé n (velikost požadovaného podgrafu) a každé k (počet barev) existuje N takové, že pro libovolnou dvojici obarvení hran c_1, c_2 úplného grafu na N vrcholech (tedy funkce $c_1, c_2 : \binom{\{1,\dots,N\}}{2} \to \{1, \dots, k\}$) existuje úplný podgraf velikosti n, který je jednobarevný jak v obarvení c_1, tak v obarvení c_2.

Úloha 4: Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami, vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.

b) Pro každé přirozené n existuje přirozené N takové, že jsou-li vrcholy úplného grafu K_N obarveny dvěma barvami, potom v uvažovaném grafu je úplný podgraf K_n jehož všechny vrcholy jsou obarveny toutéž barvou.

c) Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené N takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo **doplněk** G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf. (Zmiňovaný podgraf nemusí být indukovaný.)

d) Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené N takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje **doplněk** $K_{n,n}$ jako podgraf. (Zmiňovaný podgraf nemusí být indukovaný.)

Úloha 5: Hrany grafu K_n jsou obarveny červeně a modře. Dokažte, že v tomto grafu najdeme buď modrý trojúhelník nebo červený čtyřcylus pro

a) $k = 9$.

b) $k = 8$.

Úloha 6: Mřížové body v rovině jsou obarveny 2015 barvami. Ukažte, že lze zvolit 2010 řádků a 2010 sloupců tak, že všechny jejich průsečíky mají stejnou barvu. (Mřížové body jsou body, které mají obě souřadnice celočíselné.)