Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Ukažte, že hrany každého vrcholově dvousouvislého grafu lze zorientovat tak, že mezi každými dvěma vrcholy vede (jednosměrně) orientovaná cesta. Takové orientaci se říká silně souvislá orientace.

Platí i obrácená implikace? (Tedy, má-li graf silně souvislou orientaci, pak je dvousouvislý.)

Úloha 2: Má-li rovinný graf celkem 12 stěn, každá z nich je pětiúhelník a každý vrchol má stupeň 3, kolik má vrcholů?

Úloha 3: Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednou společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

Úloha 4: Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh, a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.

Úloha 5: Dvacet studentů psalo písemku, která měla čtyři úlohy. Pro každou dvojici studentů bychom v písemce našli úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokažte, že některou z úloh správně vyřešila většina studentů.

Úloha 6: V matici 10×10 jsou čísla $\{1, 2, \ldots, 10\}$ zapsána tak, že každé číslo má deset výskytů. Ukažte, že pak v některém sloupci nebo řádku nalezneme alespoň čtyři různá čísla.

Obecně, když se v matici $n \times n$ každé číslo vyskytuje přesně n-krát, potom nějaký řádek či sloupec má aspoň $\sqrt{n}$ různých čísel. Pokud je $\sqrt{n}$ celé číslo, je ten odhad těsný.

Úloha 7: V uspořádání podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 8\}$ inkluzí určete velikost maximálního antiřetězce obsahujícího:

a) množiny $\{1\}$ a $\{8\}$.

b) množinu $\{1, 8\}$.

Úloha 8: Matematické soutěže se zúčastnilo 21 chlapců a 21 dívek. Každý ze soutěžících vyřešil nejvýše 6 úloh. Dále, pro každou dívku a každého chlapce platí, že aspoň jednu úlohu vyřešili oba zároveň. Dokažte, že existuje úloha, kterou zároveň vyřešili alespoň tři dívky a alespoň tři chlapci.

Úloha 9: Určte počet koster následujících grafů

a) $C_m \oplus_e C_n$ (slepím za hranu)

b) $C_m \oplus_e K_n$

c) $K_m \oplus_e K_n$

d) $K_n \div e$ (podrozdělíme jednu hranu)

e) $K_n \div E$ (podrozdělíme všechny hrany)

f) $2K_n$ (ke každé hraně přidáme jednu paralelní)

g) $K_{m,n}$

h) $K_{m,n} - e$

i) $K_{m,n} \div E$

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Ukažte, že hrany každého vrcholově dvousouvislého grafu lze zorientovat tak, že mezi každými dvěma vrcholy vede (jednosměrně) orientovaná cesta. Takové orientaci se říká silně souvislá orientace.

Platí i obrácená implikace? (Tedy, má-li graf silně souvislou orientaci, pak je dvousouvislý.)

Úloha 2: Má-li rovinný graf celkem 12 stěn, každá z nich je pětiúhelník a každý vrchol má stupeň 3, kolik má vrcholů?

Úloha 3: Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednou společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

Úloha 4: Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh, a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.

Úloha 5: Dvacet studentů psalo písemku, která měla čtyři úlohy. Pro každou dvojici studentů bychom v písemce našli úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokažte, že některou z úloh správně vyřešila většina studentů.

Úloha 6: V matici 10×10 jsou čísla $\{1, 2, \ldots, 10\}$ zapsána tak, že každé číslo má deset výskytů. Ukažte, že pak v některém sloupci nebo řádku nalezneme alespoň čtyři různá čísla.

Obecně, když se v matici $n \times n$ každé číslo vyskytuje přesně n-krát, potom nějaký řádek či sloupec má aspoň $\sqrt{n}$ různých čísel. Pokud je $\sqrt{n}$ celé číslo, je ten odhad těsný.

Úloha 7: V uspořádání podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 8\}$ inkluzí určete velikost maximálního antiřetězce obsahujícího:

a) množiny $\{1\}$ a $\{8\}$.

b) množinu $\{1, 8\}$.

Úloha 8: Matematické soutěže se zúčastnilo 21 chlapců a 21 dívek. Každý ze soutěžících vyřešil nejvýše 6 úloh. Dále, pro každou dívku a každého chlapce platí, že aspoň jednu úlohu vyřešili oba zároveň. Dokažte, že existuje úloha, kterou zároveň vyřešili alespoň tři dívky a alespoň tři chlapci.

Úloha 9: Určte počet koster následujících grafů

a) $C_m \oplus_e C_n$ (slepím za hranu)

b) $C_m \oplus_e K_n$

c) $K_m \oplus_e K_n$

d) $K_n \div e$ (podrozdělíme jednu hranu)

e) $K_n \div E$ (podrozdělíme všechny hrany)

f) $2K_n$ (ke každé hraně přidáme jednu paralelní)

g) $K_{m,n}$

h) $K_{m,n} - e$

i) $K_{m,n} \div E$