

## Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Nechť  $k_v$  značí maximální vrcholovou a  $k_e$  maximální hranovou souvislost grafu.

- Dokažte, že pro graf  $G$  a hranu  $e \in E(G)$  platí  $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$ .
- Dokažte, že pro graf  $G$  a vrchol  $v \in V(G)$  platí  $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - v)$ .
- Dokažte, že pro graf  $G$  a hranu  $e \in E(G)$  platí  $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e)$ .

*Úloha 2:* Dokažte, že kontrakce hrany nesníží vrcholovou souvislost grafu o více než 1. Jinými slovy, že  $k_v(G/e) \geq k_v(G) - 1$ .

*Úloha 3:* Pro libovolnou dvojici přirozených čísel  $k \geq 2$ ,  $\ell \geq 2$  nalezněte graf, který je hranově  $k$ -souvislý, ale není vrcholově  $\ell$ -souvislý.

*Úloha 4:* Dokažte, že pro každý 3-regulární graf  $G$  platí, že  $k_v(G) = k_e(G)$ .

*Úloha 5:* Každý kubický (tj. 3-regulární) bipartitní souvislý graf je nutně vrcholově 2-souvislý. Dokažte.

*Úloha 6:* Nechť  $G$  je libovolný graf na  $2n$  vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň alespoň  $n$ . Dokažte, že  $G$  je hranově  $n$ -souvislý.

*Úloha 7:* Dokažte následující tvrzení: Nechť  $G$  je (vrcholově) 2-souvislý graf a  $u, v$  dva jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v  $G$  obsahující  $u$  i  $v$ .

*Úloha 8:* Ukažte, že graf bez izolovaných vrcholů je dvousouvislý, právě když

- každé dvě hrany leží na společném cyklu.
- každé dvě sousední hrany leží na společném cyklu.

*Úloha 9:* Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení:

- Nechť  $G$  je vrcholově 2-souvislý graf a  $u, v, w, z$  čtyři jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v  $G$  obsahující všechny tyto vrcholy.
- Nechť  $G$  je hranově 2-souvislý graf a  $e, f$  dvě jeho hrany. Potom existuje kružnice v  $G$  obsahující  $e$  i  $f$ .
- Nechť  $G$  je vrcholově 3-souvislý graf a  $y, n$  dva jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v  $G$  procházející vrcholem  $y$  a neprocházející vrcholem  $n$ .

*Úloha 10:* Dokažte následující zobecnění Mengerovy věty:

- Graf  $G$  je  $k$ -souvislý právě tehdy, když pro každý jeho vrchol  $v$  a množinu  $A \in \binom{V(G)}{k}$  existuje  $k$  cest mezi  $v$  a vrcholy množiny  $A$ , které jsou vrcholově disjunktní až na vrchol  $v$ . (Tyto cesty tvoří „vějíř“ v grafu  $G$ .)
- Graf  $G$  je  $k$ -souvislý právě tehdy, když pro každé dvě množiny vrcholů  $A, B \in \binom{V(G)}{k}$  (ne nutně disjunktní) existuje  $k$  vrcholově disjunktních cest, jejichž jeden krajní vrchol leží v  $A$  a druhý v  $B$ .

*Úloha 11:* Pro jaké největší  $k$  existuje rovinný vrcholově  $k$ -souvislý graf?

*Úloha 12:* Hyperkrychle dimenze  $d$  budeme říkat grafu  $Q_d$ , jehož vrcholy jsou všechny posloupnosti  $d$  nul a jedniček a dva vrcholy jsou spojené hranou, pokud se jejich posloupnosti liší na právě jedné pozici. Určete, jakou má graf  $Q_d$  vrcholovou a hranovou souvislost.

*Úloha 13:* Dokažte, že každý vrcholově 2-souvislý graf na  $n$  vrcholech má alespoň  $n$  koster. Kdy nastává rovnost?