Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nechť k_v značí maximální vrcholovou a k_e maximální hranovou souvislost grafu.

a) Dokažte, že pro graf G a hranu $e \in E(G)$ platí $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$.

b) Dokažte, že pro graf G a vrchol $v \in V(G)$ platí $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - v)$.

c) Dokažte, že pro graf G a hranu $e \in E(G)$ platí $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e)$.

Úloha 2: Dokažte, že kontrakce hrany nesníží vrcholovou souvislost grafu o více než 1. Jinými slovy, že $k_v(G/e) \geq k_v(G) - 1$.

Úloha 3: Pro libovolnou dvojici přirozených čísel $k \geq 2$, $\ell \geq 2$ nalezněte graf, který je hranově k-souvislý, ale není vrcholově ℓ-souvislý.

Úloha 4: Dokažte, že pro každý 3-regulární graf G platí, že $k_v(G) = k_e(G)$.

Úloha 5: Každý kubický (tj. 3-regulární) bipartitní souvislý graf je nutně vrcholově 2-souvislý. Dokažte.

Úloha 6: Nechť G je libovolný graf na $2n$ vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň alespoň n. Dokažte, že G je hranově n-souvislý.

Úloha 7: Dokažte následující tvrzení: Nechť G je (vrcholově) 2-souvislý graf a u, v dva jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G obsahující u i v.

Úloha 8: Ukažte, že graf bez izolovaných vrcholů je dvousouvislý, právě když

a) každé dvě hrany leží na společném cyklu.

b) každé dvě sousední hrany leží na společném cyklu.

Úloha 9: Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

a) Nechť G je vrcholově 2-souvislý graf a u, v, w, z čtyři jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G obsahující všechny tyto vrcholy.

b) Nechť G je hranově 2-souvislý graf a e, f dvě jeho hrany. Potom existuje kružnice v G obsahující e i f.

c) Nechť G je vrcholově 3-souvislý graf a y, n dva jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G procházející vrcholem y a neprocházející vrcholem n.

Úloha 10: Dokažte následující zobecnění Mengerovy věty:

a) Graf G je k-souvislý právě tehdy, když pro každý jeho vrchol v a množinu $A \in \binom{V(G)}{k}$ existuje k cest mezi v a vrcholy množiny A, které jsou vrcholově disjunktní až na vrchol v. (Tyto cesty tvoří „vějíř“v grafu G.)

b) Graf G je k-souvislý právě tehdy, když pro každé dvě množiny vrcholů $A, B \in \binom{V(G)}{k}$ (ne nutně disjunktní) existuje k vrcholově disjunktních cest, jejichž jeden krajní vrchol leží v A a druhý v B.

Úloha 11: Pro jaké největší k existuje rovinný vrcholově k-souvislý graf?

Úloha 12: Hyperkrychle dimenze d budeme říkat grafu Q_d, jehož vrcholy jsou všechny posloupnosti d nul a jedniček a dva vrcholy jsou spojené hranou, pokud se jejich posloupnosti liší na právě jedné pozici. Určete, jakou má graf Q_d vrcholovou a hranovou souvislost.

Úloha 13: Dokažte, že každý vrcholově 2-souvislý graf na n vrcholech má alespoň n koster. Kdy nastává rovnost?