Úlohy ke cvičení

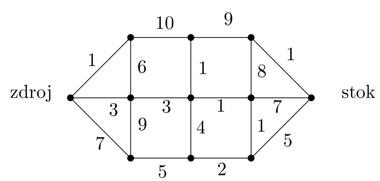
Úloha 1: Kolika způsoby lze korektně vyplnit první dva řádky latinského čtverce řádu n?

Úloha 2: Obyčejný čtverec řádu n je matice $n \times n$ s prvky z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Ortogonalita obyčejných čtverců je definována stejně jako pro latinské čtverce (t.j. A je kolmý na B právě tehdy, když $(a_{ij}, b_{ij}) = (a_{k\ell}, b_{k\ell}) \Rightarrow (i, j) = (k, \ell)$).

Dokažte, že existuje množina t navzájem po dvou ortogonálních latinských čtverců řádu n právě tehdy, když existuje množina $t + 2$ navzájem ortogonálích obyčejných čtverců řádu n.

Úloha 3: Nechť p je prvočíslo a $\mathbf{Z}_p$ těleso celých čísel modulo p. Definujme čtvercové tabulky $T^1, \dots, T^{p-1}$ předpisem $T^a_{i,j} = ai + j$, kde $i, j \in \mathbf{Z}_p$ a sčítání i násobení jsou operace tělesa. Dokažte, že $T^1, \dots, T^{p-1}$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce řádu p.

Úloha 4: Najděte nějaký maximální tok v síti na obrázku.



Úloha 5: Vyslovte a dokažte analogii Ford-Fulkersonovy věty pro sítě s omezením kapacit vrcholů místo hran.

Úloha 6: Buďte $A_1, \dots, A_n$ navzájem různé množiny o $n - 1$ prvcích. Dokažte, že pro množinový systém $(\bigcup_i A_i, \{A_1, \dots, A_n\})$ existuje systém různých reprezentantů.

Úloha 7: Uvažujme systém všech $(n - 1)$-prvkových podmnožin množiny $\{1, \dots, n\}$. Kolik má systémů různých reprezentantů?

Úloha 8: Dokažte následující zobecnění Hallovy věty: Mějme množinový systém $(X, \mathcal{S})$ a přirozené číslo k takové, že libovolný podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ obsahuje alespoň $|\mathcal{T}| - k$ prvků. Potom po škrtnutí nejvýše k množin má $\mathcal{S}$ systém různých reprezentantů.

Úloha 9: Dokažte, že hrany k-regulárního bipartitního grafu lze vyjádřit jako sjednocení k perfektních párování.

Úloha 10: Nechť G je bipartitní graf s $2n$ vrcholy takový, že každá z jeho částí má n vrcholů.

a) Předpokládejme, že minimální stupeň v G je alespoň $n/2$. Dokažte, že G obsahuje perfektní párování.

b) Musí G obsahovat perfektní párování, kdyby minimální stupeň byl $\lceil n/2 \rceil - 1$?

Úloha 11: Graf $G_{n,a,b}$ pro přirozená čísla $a, b \le n$, $a \neq b$ je definován:

$$V(G_{n,a,b}) = \{X : X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, |X| \in \{a, b\}\},$$
$$E(G_{n,a,b}) = \{XY : X \subset Y\}.$$

V závislosti na a, b a n určete velikost největšího párování tohoto grafu.

Úloha 12: Uvažujme logickou formuli tvaru $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots) \wedge (x_3 \vee \dots) \wedge \dots$, tedy takovou, která je disjunkcí *klauzulí,* což jsou konjunkce *literálů* a každý literál je buďto proměnná nebo její negace. Formule je *splnitelná,* pokud je za proměnné možné dosadit pravda/nepravda tak, aby celá formule byla pravdivá. Dokažte, že libovolná formule, jejíž každá klauzule obsahuje právě 3 literály a každá proměnná se vyskytuje v právě 3 různých klauzulích, je splnitelná.

Úloha 13: Je dána množina s $(q + 1)^2$ body. Každému bodu u je přiřazena množina barev $L(u)$ o velikosti $q + 1$. Navíc pro libovolné dva různé body u, v platí $|L(u) \cap L(v)| \le 1$. Dokažte, že body lze obarvit tak, že každý bod u dostane barvu z $L(u)$ a různé body jsou obarveny různými barvami.