Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nahradíme nultý axiom konečných projektivních rovin (ten o netrivialitě) tím, že každá přímka obsahuje alespoň dva body. Každá konečná projektivní rovina podle původní definice bude vyhovovat i té nové, ale opačně to neplatí. Které další množinové systémy nová definice připouští?

Úloha 2: Dokažte, že pro nekonečně mnoho různých n existují grafy na n vrcholech s $\Omega(n^{3/2})$ hranami, které neobsahují jako podgraf čtyřcyklus (C_4). Ke konstrukci můžete elegantně využít konečné projektivní roviny.

Úloha 3: Pro množinový systém $(X, \mathcal{P})$ uvažme podmínky:

(P0a) $\exists P_1, P_2 \in \mathcal{P} : P_1 \neq P_2 \wedge |P_1| \geq 3 \wedge |P_2| \geq 3$.

(P0b) X nelze pokrýt dvěma přímkami.

Ještě připomeňme podmínky z definice konečných projektivních rovin:

(P0) Existuje čtyřbodová množina $\check{C} \subseteq X$ taková, že $|P \cap \check{C}| \leq 2$ pro každou množinu $P \in \mathcal{P}$.

(P1) Každé dvě různé množiny $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mají jednobodový průnik.

(P2) Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje právě jedna množina $P \in \mathcal{P}$ taková, že $x_1 \in P$ a $x_2 \in P$.

Dokažte, že $(X, \mathcal{P})$ je KPR právě tehdy, když splňuje (P0a), (P1) a (P2), resp. (P0b), (P1) a (P2).

Úloha 4: Nechť $(X, \mathcal{P})$ je množinový systém a pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí:

— $|X| = |\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$ a

— $\forall P \in \mathcal{P} : |P| = n + 1$.

Jestliže navíc platí $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : P_1 \neq P_2 \Rightarrow |P_1 \cap P_2| \leq 1$, je potom $(X, \mathcal{P})$ konečná projektivní rovina řádu n?

Úloha 5: Nechť $(X, \mathcal{P})$ je množinový systém a pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí:

— $|X| = |\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$,

— $\forall P \in \mathcal{P} : |P| = n + 1$ a

— $\forall x \in X : |\{P \in \mathcal{P} : x \in P\}| = n + 1$.

Je pak $(X, \mathcal{P})$ konečná projektivní rovina?

Úloha 6: Dokažte, že pro konečnou projektivní rovinu dostatečně vysokého řádu platí zobecnění axiomu pro čtveřice:

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro $(X, \mathcal{P})$ konečnou projektivní rovinu řádu alespoň n existuje k bodů v obecné poloze, tedy množina $Y \subseteq X, |Y| = k$ splňující $\forall P \in \mathcal{P} : |Y \cap P| \leq 2$.

Úloha 7: Nechť $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina řádu q. Vytvořme bipartitní graf $G = G(X, \mathcal{P})$ s částmi X a $\mathcal{P}$ tak, že bod z $x \in X$ a přímka z $p \in \mathcal{P}$ jsou spojeny hranou, právě když x náleží p.

a) Určete obvod g grafu G. (Obvodem grafu, který obsahuje alespoň jednu kružnici, rozumíme velikost nejmenší kružnice v grafu obsažené.)

b) Určete počet kružnic v G velikosti g.

c) Nechť H je bipartitní $(q+1)$-regulární graf (tj. každý vrchol má stupeň $q+1$) pro $q \geq 2$, bez kružnic velikosti 4 a takový, že mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta délky nejvýše 3 spojující tyto dva vrcholy. Dokažte, že H je izomorfní $G(X', \mathcal{P}')$ pro nějakou konečnou projektivní rovinu $(X', \mathcal{P}')$ řádu q.