Příklady ke cvičení

Příklad 1: V následujících úlohách vyjádřete hledaný počet jako koeficient vhodné mocniny x ve vhodném součinu mnohočlenů.

a) V cukrárně prodávají tři druhy zákusků — větrníky, kremrole a punčové dortíky. Kolika způsoby lze koupit 12 zákusků tak, aby se od každého druhu koupily alespoň dva zákusky a přitom nejvýš tři kremrole?

b) Kolika způsoby lze rozdělit 10 stejných balónků dvěma chlapečkům a dvěma holčičkám, má-li každý chlapeček dostat aspoň jeden balónek a každá holčička nejméně dva?

Příklad 2: Vyjádřete v co nejjednodušším tvaru

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k})\ .$$

Příklad 3: Určete koeficient u příslušné mocniny x ve výrazech:

a) u x^{15} v $(x^2+x^3+x^4+\dots)^4$

b) u x^5 v $(1-2x)^{-2}$

c) u x^4 v $(1+x)^{1/3}$

Příklad 4: Zjistěte, jaká posloupnost je generovaná vytvořující funkcí:

a) $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

Příklad 5: Ověřte, že je-li $a(x)$ vytvořující funkce pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, potom $a(x)/(1-x)$ je vytvořující funkce pro posloupnost částečných součtů $(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \dots)$.

Příklad 6: Sestrojte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (nepoužívejte v jejich zápisu nekonečné řady!):

a) $(1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\dots)$

b) $(0,1,1,2,2,4,3,8,4,16,\dots,i,2^i,\dots)$

c) $(1,1,1,1,1,1,\dots)$

d) $(1,2,3,4,5,6,\dots)$

e) $(1,0,1,0,1,0,\dots)$

f) $(1,-1,1,-1,1,-1,\dots)$

g) $(1,2,1,4,1,8,\dots)$

h) $(2,1,4,3,6,5,\dots)$

i) $(1,-3,5,-7,9,-11,\dots)$

Příklad 7: Nalezněte vzorec (analytické vyjádření) pro n-tý člen posloupnosti zadané pomocí rekurence:

a) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$

b) $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 4$

c) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$

d) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n) + 1$

e) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$

f) $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 1$

g) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$

h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2$

i) $a_0 = a_1 = 1, 5a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

Příklad 8: Sečtěte

a) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$

d) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

e) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

Příklad 9: Sestrojte dvě šestistěnné kostky takové, že na jejich stěnách jsou napsána přirozená čísla (stejné číslo může být napsáno na více stěnách). Pravděpodobnost, že po hodu těmito dvěma kostkami padne číslo k je stejná jako při hodu standardními (poctivými) kostkami, přitom se ale o standardní kostky nejedná.

Příklad 10: Pro posloupnost zadanou rekurentním vztahem $a_0 = 2, a_1 = 8, a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ určete $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Příklad 11: Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $2 \times n$ pomocí dlaždic 1×2? A kolik různých způsobů dláždění stejnými dlaždicemi má obdélník o rozměrech $3 \times n$? (Označte počet dláždění jako a_n a najděte rekurentní vztah a vytvořující funkci, a_0 vhodně dodefinujte.)