

## 1. písemka, řešení

1. Označme  $A_i$  množinu čísel mezi 1 a 420 dělitelných číslem  $i$ . Potom podle principu inkluze a exkluze

$$\begin{aligned} |A_6 \cup A_7 \cup A_{10}| &= |A_6| + |A_7| + |A_{10}| - |A_6 \cap A_7| - |A_6 \cap A_{10}| - |A_7 \cap A_{10}| + |A_6 \cap A_7 \cap A_{10}| = \\ &= |A_6| + |A_7| + |A_{10}| - |A_{42}| - |A_{30}| - |A_{70}| + |A_{210}| = 70 + 60 + 42 - 10 - 14 - 6 + 2 = 144. \end{aligned}$$

Tedy odpověď na zadání úlohy je  $420 - 144 = 276$ .

2. Posloupnosti  $(1, 1, 1, \dots)$  odpovídá VF  $\frac{1}{1-x}$ . Posloupnosti  $(1, 2, 3, \dots)$  odpovídá VF  $\frac{1}{(1-x)^2}$  (to se získá buď zderivováním předchozí VF, nebo konvolucí sama se sebou). Posloupnosti  $(0, 2, 4, 6, \dots)$  tedy odpovídá vytvořující funkce  $\frac{2x}{(1-x)^2}$ . Sečtením této posloupnosti s posloupností samých jedniček dostaneme posloupnost ze zadání, tedy příslušná vytvořující funkce po úpravách je  $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ .

3. Pro část (a) spočítáme, že mezi  $A$  a  $B$  vede  $2 \cdot |A| = 4 \cdot 8$  hran. Tedy  $|A| = 16$ .

Pro část (b) ukážeme, že maximální párování má velikost 8. Větší být určitě nemůže, neboť  $|B| = 8$ . K tomu, že existuje párování velikosti 8 stačí ověřit Hallovu podmínku: nechť  $I \subseteq B$ . Spočtíme počet hran (značený  $e_I$ ) mezi  $I$  a  $N(I)$ . Od části  $B$  získáváme, že  $e_I = 4 \cdot |I|$ . Od části  $A$  dostáváme, že  $e_I \leq 2|N(I)|$ . Tedy  $N(I) \geq 2|I| \geq |I|$ , čímž je Hallova podmínka ověřena.

4. Pro spor nechť  $G$  má vrcholový řez velikosti 1 tvořený vrcholem  $v$ . Vrchol  $v$  tedy sousedí s alespoň dvěma komponentami grafu  $G - v$ . Vzhledem k tomu, že má stupeň 4, tak alespoň do jedné z komponent vedou z  $v$  nejvýše dvě hrany. Odstraněním těchto dvou hran dostaneme hranový řez velikosti nejvýše 2. To je spor s hranovou 3-souvislostí.