7. cvičení z Kombinatoriky a grafů—12. 4. 2010

Latinské obdélníky

1. Pro $m \leq n$ definujeme latinský $m \times n$ obdélník jako obdélníkovou tabulku $m \times n$, v jejímž každém políčku je zapsáno jedno číslo z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, že v žádném řádku ani v žádném sloupci se čísla neopakují. Spočtěte počet latinských $2 \times n$ obdélníků.

Hallova věta

2. Dokažte, že hrany k-regulárního bipartitního grafu lze vyjádřit jako sjednocení k perfektních párování.

3. Nechť G je bipartitiní graf s $2n$ vrcholy takový, že každá z jeho částí má n vrcholů.
(a) Předpokládejme, že minimální stupeň je alespoň $n/2$. Dokažte, že G obsahuje perfektní párování.
(b) Musí G obsahovat perfektní párování, kdyby minimální stupeň byl $\lceil n/2 \rceil - 1$?

4. Graf $G_{n,a,b}$ pro přirozená čísla $a, b \leq n$, $a \neq b$ je definován:

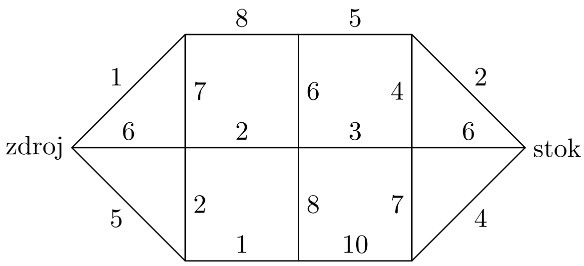
$$V(G_{n,a,b}) = \{X : X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, |X| \in \{a, b\}\},$$
$$E(G_{n,a,b}) = \{XY : X \subset Y\}.$$

V závislosti na a, b a n určete velikost největšího párování tohoto grafu.

5*. Je dána množina s $q^2 + 1$ body. Každému bodu u je přiřazena množina barev $L(u)$ o velikosti $q + 1$. Navíc pro libovolné dva různé body u, v platí $|L(u) \cap L(v)| \leq 1$. Dokažte, že body lze obarvit tak, že každý bod u dostane barvu z $L(u)$ a různé body jsou obarveny různými barvami.

Toky v sítích

6. Najděte nějaký maximální tok v grafu na obrázku.



7*. Vyslovte a dokažte analogii Ford-Fulkersonovy věty pro sítě s omezením kapacit vrcholů místo hran.