6. cvičení z Kombinatoriky a grafů—29. 3. 2010

Vytvořující funkce - lineární rekurentní rovnice

1. Určete vzoreček pro n-tý člen následujících rekurentně zadaných posloupností.

(a) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ pro $n \geq 2$;

(b) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ pro $n \geq 2$.

Projektivní roviny

Připomenutí definice: Dvojice $(X, \mathcal{P})$ se nazývá *konečná projektivní rovina*, pokud X je konečná množina (množina *bodů*), $\mathcal{P}$ je systém podmnožin X (množina *přímek*) a jsou splněny podmínky:

(P0) Existuje čtyřbodová $C \subseteq X$ taková, že $|P \cap C| \leq 2$ pro každou přímku $P \in \mathcal{P}$.

(P1) Každé dvě různé přímky $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ se protínají v právě jednom bodě.

(P2) Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje právě jedna přímka $P \in \mathcal{P}$ obsahující tyto dva body.

2. (a) Najděte příklad množinového systému splňujícího podmínky (P1), (P2), ale nesplňujícího (P0).
(b*) Najděte všechny takové množinové systémy (nebo alespoň co nejvíc).

3. Dokažte, že existuje jediná projektivní rovina řádu 2 (a to Fanova rovina).

4. Nechť x je konečná množina a $\mathcal{P}$ systém jejích podmnožin splňující podmínky (P1) a (P2) a dále platí, že v něm existují alespoň dvě různé přímky $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ obsahující alespoň tři body. Dokažte, že $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina.

5. Ukažte, že Fanovu rovinu nelze narovnat, tj., neexistuje 7 (euklidovských) přímek a 7 bodů v rovině takových, že každá dvojice bodů leží na jedné z přímek a každá dvojice přímek má průsečík v jednom z bodů.