3. cvičení z Kombinatoriky a grafů— 8. 3. 2010

Vytvořující funkce

1. Určete vytvořující funkce pro následující posloupnosti.

(a) $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots)$;

(b) $(1, -2, 3, -4, 5, \dots)$;

(c) $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$;

(d) $(1, 8, 27, 64, 125, \dots)$;

(e) $(0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$;

(f) $\left(\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \binom{m}{3}, \dots\right)$.

2. Určete posloupnosti vytvořené následujícími funkcemi

(a) $\frac{1}{1+mx}$;

(b) $\log_a(1 + mx)$;

(c) $\frac{1}{1-x^3}$.

3*. Sestrojte dvě šestistěnné kostky takové, že na jejich stěnách jsou napsána přirozená čísla (stejné číslo může být napsáno na více stěnách). Pravděpodobnost, že po hodu těmito dvěma kostkami padne číslo k je stejná jako při hodu standardními (poctivými) kostkami, přitom se ale o standardní kostky nejedná.

Catalanova čísla

Catalanova čísla jsou čísla c_n definovaná rekurencí $c_0 = 1$; $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0$.

4. Ukažte, že c_n odpovídá počtu binárních stromů s n vrcholy.

5. Ve čtvercové mřížce $n \times n$ je levý dolní bod označen A a pravý horní bod označen B. Uvažujme cesty, které vedou z bodu A do bodu B, ale vedou jen doprava a nahoru. (a) Kolik je všech takových cest?
(b) Ukažte, že počet cest takových, které vedou pouze pod diagonálou (diagonály se dotýkat mohou) je c_n.

6. Pravidelný n-úhelník rozdělíme na trojúhelníky zakreslením $n - 3$ neprotínajících se úhlopříček. Ukažte, že počet takových dělení je právě c_{n-2}.

7. Pomocí vytvořujících funkcí spočtěte

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$