11. cvičení z Kombinatoriky a grafů—10. 5. 2010

Dirichletův princip a Ramseovy věty

1. Na šachovnici 8×8 je umístěno 33 věží. Dokažte, že existuje mezi těmito věžemi 5 takových, které se navzájem neohrožují.

2. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- Pro každé přirozené n existuje přirozené N takové, že je-li X libovolná N-prvková množina a je-li každá uspořádaná dvojice $(u, v) \in X \times X$ obarvena jednou ze dvou barev, pak existuje n-prvková $Y \subset X$ taková, že všechny uspořádané dvojice z $Y \times Y$ mají stejnou barvu.
- Pro každé přirozené n existuje přirozené N takové, že jsou-li vrcholy úplného grafu K_N obarveny dvěma barvami, potom v uvažovaném grafu je úplný podgraf K_n jehož všechny vrcholy jsou obarveny toutéž barvou.
- Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené N takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo doplněk G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf. (Zmiňovaný podgraf nemusí být indukovaný.)
- Pro každé přirozené číslo n existuje přirozené N takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf. (Zmiňovaný podgraf nemusí být indukovaný.)

3. Nechť jsou hrany grafu K_9 obarveny červeně a modře. Dokažte, že pak v tomto K_9 existuje buď modrý trojúhelník nebo červený 4-cyklus.

4*. Nechť jsou hrany grafu K_8 obarveny červeně a modře. Dokažte, že pak v tomto K_8 existuje buď modrý trojúhelník nebo červený 4-cyklus.

5*. Mřížové body v rovině jsou obarveny 2010 barvami. Ukažte, že lze zvolit 2010 řádků a 2010 sloupců tak, že všechny jejich průsečíky mají stejnou barvu. (Mřížové body jsou body, které mají obě souřadnice celočíselné.)