

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

c) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

d) $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$

e) $\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

f) $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

Úloha 2: Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$

d) $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$

Úloha 3: Určete počet

a) uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

b) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D) , kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Úloha 4: Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (T.j. nestáli na sousedních políčkách.)

Úloha 5: Rozmísťujeme k kuliček do n přihrádek. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou	V každé přihrádce je		
	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

Úloha 6: Barevná inkoustová tiskárna dokáže umístit až 8 kapek na jeden bod. Kapka může mít azurovou (C-Cyan), fialovou (M-Magenta), žlutou (Y-Yellow) nebo černou (K-black) barvu.

Kolik různých barevných odstínů lze dosáhnout v jednom bodě, předpokládáme-li, že smíšení tří různobarevných (CMY) kapek má stejný efekt, jako dvě černé? (Např. odstín $3C+2Y+M+K$ je stejný jako $2C+Y+3K$.)

Úloha 7:

- a) Kolika způsoby lze postavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?
- b) Kolik je možností, kdybychom je za stejných podmínek měli stavět do kruhu?
- c) A co když do kruhu budeme stavět opět 5 vodníků, ale 10 čarodějnic?
- d) A co když máme mít v kruhu 6 vodníků a 12 čarodějnic?

Úloha 8: Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?