

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Mějme souvislý k -regulární rovinný graf G s takovým rovinným nakreslením, že všechny stěny mají stupeň ℓ . Dále označme n počet vrcholů tohoto grafu.

- Ukažte, že platí $n(2k + 2\ell - k\ell) = 4\ell$.
- Odvoďte, že jediné možnosti pro (k, ℓ) jsou $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ a $(5, 3)$. V každé z variant určete počet vrcholů a hran příslušného grafu.
- Pro každou z možností v předchozím bodě nalezněte graf, který zadání splňuje.

Úloha 2: Charakterizujte

- takové rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku.
- takové rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku ani dvojici násobných hran.

Úloha 3: Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

Úloha 4: Dokažte větu o třech barvách pro vnějškově rovinné grafy, t.j. pro grafy jež mají rovinné nakreslení takové, že všechny vrcholy leží na vnější stěně.

Úloha 5: Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Úloha 6: Ukažte, že neexistuje eulerovský rovinný graf jehož stěny by tvořil jeden pěticykus a samé trojúhelníky.

Úloha 7: Dokažte, že každý rovinný graf lze vyjádřit jako sjednocení pěti hranově disjunktních lesů.

(Platí to i pro tři lesy, ale to už není tak snadné dokázat.)