Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Mějme souvislý k-regulární rovinný graf G s takovým rovinným nakreslením, že všechny stěny mají stupeň ℓ. Dále označme n počet vrcholů tohoto grafu.

a) Ukažte, že platí $n(2k + 2\ell - k\ell) = 4\ell$.

b) Odvoďte, že jediné možnosti pro (k, ℓ) jsou $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ a $(5, 3)$. V každé z variant určete počet vrcholů a hran příslušného grafu.

c) Pro každou z možností v předchozím bodě nalezněte graf, který zadání splňuje.

Úloha 2: Charakterizujte

a) takové rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku.

b) takové rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku ani dvojici násobných hran.

Úloha 3: Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

Úloha 4: Dokažte větu o třech barvách pro vnějškově rovinné grafy, t.j. pro grafy jež mají rovinné nakreslení takové, že všechny vrcholy leží na vnější stěně.

Úloha 5: Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Úloha 6: Ukažte, že neexistuje eulerovský rovinný graf jehož stěny by tvořil jeden pěticyklus a samé trojúhelníky.

Úloha 7: Dokažte, že každý rovinný graf lze vyjádřit jako sjednocení pěti hranově disjunktních lesů.

(Platí to i pro tři lesy, ale to už není tak snadné dokázat.)

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Mějme souvislý k-regulární rovinný graf G s takovým rovinným nakreslením, že všechny stěny mají stupeň ℓ. Dále označme n počet vrcholů tohoto grafu.

a) Ukažte, že platí $n(2k + 2\ell - k\ell) = 4\ell$.

b) Odvoďte, že jediné možnosti pro (k, ℓ) jsou $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ a $(5, 3)$. V každé z variant určete počet vrcholů a hran příslušného grafu.

c) Pro každou z možností v předchozím bodě nalezněte graf, který zadání splňuje.

Úloha 2: Charakterizujte

a) takové rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku.

b) takové rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku ani dvojici násobných hran.

Úloha 3: Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

Úloha 4: Dokažte větu o třech barvách pro vnějškově rovinné grafy, t.j. pro grafy jež mají rovinné nakreslení takové, že všechny vrcholy leží na vnější stěně.

Úloha 5: Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Úloha 6: Ukažte, že neexistuje eulerovský rovinný graf jehož stěny by tvořil jeden pěticyklus a samé trojúhelníky.

Úloha 7: Dokažte, že každý rovinný graf lze vyjádřit jako sjednocení pěti hranově disjunktních lesů.

(Platí to i pro tři lesy, ale to už není tak snadné dokázat.)