

## Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:*

Pro každé přirozené  $n$  sestrojte graf  $G_n$ , který má přesně  $n$  automorfismů, neboli izomorfismů  $G_n \rightarrow G_n$ .

*Úloha 2:* Najděte všechny grafy, které jako podgraf neobsahují

- a) cestu délky 2,
- b) cestu délky 3,
- c) cestu délky 4,
- d) žádnou sudou kružnici.

*Úloha 3:* Najděte všechny grafy, které neobsahují indukovanou cestu délky 2.

*Úloha 4:* Ukažte, že když  $G$  obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

*Úloha 5:* Nechť  $G$  je graf a  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  je jeho matice sousednosti. V závislosti na počtu vrcholů a hran určete součet všech prvků  $A$ , tj. výraz

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}.$$

*Úloha 6:* Nechť  $G$  je graf bez trojúhelníků a  $A$  jeho matice sousednosti. Jaké prvky má na hlavní diagonále  $A^3$ , tj. třetí mocnina  $A$ ?

*Úloha 7:* Ověřte, jestli následující posloupnost je skóre grafu, a pokud ano, sestrojte nějaký takový.

- a) (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)
- b) (1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)

*Úloha 8:* Najděte příklad dvou grafů (dvou stromů, stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre.

*Úloha 9:* Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

*Úloha 10:* Ukažte, že pokud má  $2k$ -regulární graf sudý počet hran, tak buď  $k$  nebo  $|V_G|$  je sudé.

*Úloha 11:* Pro každá dvě přirozená čísla  $k, n$  taková, že  $k < n$  a  $2|kn$ , najděte příklad  $k$ -regulárního grafu na  $n$  vrcholech.