Příklady ke cvičení

Příklad 1: Dokažte matematickou indukcí:

a)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}(n^2 + n).$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2.$$

c)

$$\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n.$$

d)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

e)

$$\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}.$$

Příklad 2: Dokažte matematickou indukcí $4|(6n^2 + 2n)$.

Příklad 3: Pomocí fakt $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ a $\binom{n}{k} = 0$ když $k < 0$ nebo $k > n$ dokažte že:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Příklad 4: Dokažte matematickou indukcí $\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Příklad 5: Dokažte, že pro Fibonacciovu posloupnost $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ platí:

a) $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

b) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

c) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

d) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.

Příklad 6: Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 4$ platí

$$F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2.$$

Příklad 7: Dokažte, že každé přirozené číslo n lze jednoznačně napsat ve tvaru

$$n = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j},$$

kde $i_1 \geq 2$ a pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ je $i_{j+1} \geq i_j + 2$.

Příklad 8: Dokažte že počet částí roviny při rozdělění n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$. Pokuste se odvodit podobnou hranici pro rozdělení prostroru rovinami.

Příklad 9: Je dáno reálné číslo x takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé přirozené n je i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé.

Příklad 10: Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi tvaru "L", které zabírají tři políčka.

Příklad 11: Rozhodněte, zda jsou ekvivalence následující relace a pokud ano, určete třídy ekvivalence:

a) $X_1 = \mathbb{N}, xR_1y \Leftrightarrow p|(x-y)$ (zbytkové třídy modulo $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$)

b) $X_2 = \mathbb{Z} \setminus 0, xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$

c) $X_3 = \mathbb{N}, xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x$.

Co se stane, budeme-li požadovat $z > 1$?

Příklad 12: Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujicích relací jsou také reflexivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \,\Delta\, S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}

Příklad 13: Buďte R a S symetrické relace na téže množině. Které z následujicích relací jsou také symetrické?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \,\Delta\, S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}

Příklad 14: Buďte R a S transitivní relace na téže množině. Které z následujicích relací jsou také transitivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \,\Delta\, S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}