Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte: Počet kružnic v $K_{n,n}$ je $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{k!(k-1)!}{2}$.

Úloha 2: Určete, kolik různých kružnic (všech možných délek) obsahuje úplný graf K_n. Výsledek vyjádřete pomocí sumy.

Úloha 3: Nechť X je konečná množina a $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ je množina některých jejích podmnožin uzavřená na symetrickou diferenci. Tedy, pokud Y a Z patří do $\mathcal{A}$, potom i $Y \Delta Z$ patří do $\mathcal{A}$.

a) Dokažte, že $\mathcal{A}$ společně s operací symetrické diference tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$.

b) V závislosti na velikosti $\mathcal{A}$ určete dimenzi tohoto prostoru. Jakých hodnot tedy může $|\mathcal{A}|$ nabývat?

Úloha 4: Nechť $G = (V, E)$ je graf. Množina hran $E' \subseteq E$ je *eulerovská*, jestliže graf (V, E') má všechny stupně sudé. (Tentokrát nevyžadujeme, že se jedná o souvislý graf!).

a) Dokažte, že soubor všech eulerovských množin hran daného grafu je uzavřený na symetrickou diferenci. Tedy, dokažte, že pokud $E_1, E_2 \subseteq E$ jsou eulerovské množiny hran, potom, $E_1 \Delta E_2$ je také eulerovská množina hran.

b) Dokažte, že pro každou eulerovskou množinu hran E' je $G = (V, E')$ je sjednocením hranově disjunktních kružnic.

c) Uměli byste určit počet všech eulerovských množin hran daného grafu?

Úloha 5: Určete dimenzi prostoru cyklů (tzv. cyklomatické číslo) mřížky $m \times n$.

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte: Počet kružnic v $K_{n,n}$ je $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{k!(k-1)!}{2}$.

Úloha 2: Určete, kolik různých kružnic (všech možných délek) obsahuje úplný graf K_n. Výsledek vyjádřete pomocí sumy.

Úloha 3: Nechť X je konečná množina a $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ je množina některých jejích podmnožin uzavřená na symetrickou diferenci. Tedy, pokud Y a Z patří do $\mathcal{A}$, potom i $Y \Delta Z$ patří do $\mathcal{A}$.

a) Dokažte, že $\mathcal{A}$ společně s operací symetrické diference tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$.

b) V závislosti na velikosti $\mathcal{A}$ určete dimenzi tohoto prostoru. Jakých hodnot tedy může $|\mathcal{A}|$ nabývat?

Úloha 4: Nechť $G = (V, E)$ je graf. Množina hran $E' \subseteq E$ je *eulerovská*, jestliže graf (V, E') má všechny stupně sudé. (Tentokrát nevyžadujeme, že se jedná o souvislý graf!).

a) Dokažte, že soubor všech eulerovských množin hran daného grafu je uzavřený na symetrickou diferenci. Tedy, dokažte, že pokud $E_1, E_2 \subseteq E$ jsou eulerovské množiny hran, potom, $E_1 \Delta E_2$ je také eulerovská množina hran.

b) Dokažte, že pro každou eulerovskou množinu hran E' je $G = (V, E')$ je sjednocením hranově disjunktních kružnic.

c) Uměli byste určit počet všech eulerovských množin hran daného grafu?

Úloha 5: Určete dimenzi prostoru cyklů (tzv. cyklomatické číslo) mřížky $m \times n$.