
Domácí úkol 1

Všechna řešení pečlivě zdůvodněte!

(a) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zadaná rekurentně tak, že $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a $a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$ pro $n \geq 3$. Dokažte, že $a_n = \frac{2-\sqrt{2}}{4}(2 + \sqrt{2})^{n-1} + \frac{2+\sqrt{2}}{4}(2 - \sqrt{2})^{n-1}$. (Doporučuji použít matematickou indukci.) [10 bodů]

(b) Nechtě A , B a C jsou relace na téže množině X .

(b1) Jsou-li tyto tři relace reflexivní, rozhodněte, zda je také $A\Delta B\Delta C$ nutně reflexivní ($U\Delta V$ značí symetrickou diferenci množin U a V).

(b2) Jsou-li tyto tři relace symetrické, rozhodněte, zda je také $A\Delta B\Delta C$ nutně symetrická.

(b3) Jsou-li tyto tři relace tranzitivní, rozhodněte, zda je také $A\Delta B\Delta C$ nutně tranzitivní. Ve všech případech své tvrzení pořádně zdůvodněte (tj. dokažte nebo nalezněte protipříklad).

[9 bodů]