Princip inkluze a exkluze—motivace

Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

Princip inkluze a exkluze—motivace

Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

- Zaveďme si $A_k := \{n \in [10000] \colon k|n\}$. Chceme $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Princip inkluze a exkluze—motivace

Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

- Zaveďme si $A_k := \{n \in [10000] \colon k | n\}$. Chceme $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Snadno spočteme:

- $|A_2| = 10000/2 = 5000$

Princip inkluze a exkluze—motivace

Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

- Zaveďme si $A_k := \{n \in [10000] \colon k|n\}$. Chceme $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Snadno spočteme:

- $|A_2| = 10000/2 = 5000$
- $|A_3| = 9999/3 = 3333$

Princip inkluze a exkluze—motivace

Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

- Zaveďme si $A_k := \{n \in [10000] \colon k|n\}$. Chceme $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Snadno spočteme:

- $|A_2| = 10000/2 = 5000$
- $|A_3| = 9999/3 = 3333$
- $|A_5| = 10000/5 = 2000$

Princip inkluze a exkluze—motivace

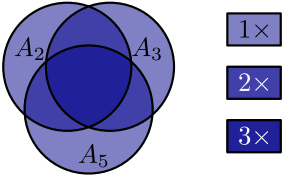
Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

- Zaveďme si $A_k := \{n \in [10000] \colon k|n\}$. Chceme $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Snadno spočteme:

- $|A_2| = 10000/2 = 5000$
- $|A_3| = 9999/3 = 3333$
- $|A_5| = 10000/5 = 2000$
- Co vyjadřuje $|A_2| + |A_3| + |A_5|$?



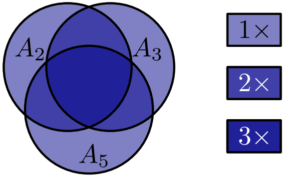
Princip inkluze a exkluze—motivace

Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

- Zaveďme si $A_k := \{n \in [10000] \colon k|n\}$. Chceme $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Snadno spočteme:



- $|A_2| = 10000/2 = 5000$
- $|A_3| = 9999/3 = 3333$
- $|A_5| = 10000/5 = 2000$
- Co vyjadřuje $|A_2| + |A_3| + |A_5|$?
- Dále $|A_2 \cap A_3| = |A_6| = \frac{9996}{6} = 1666$; $|A_2 \cap A_5| = 1000$; $|A_3 \cap A_5| = \frac{9990}{15} = 2\frac{9990}{30} = 666$.

Princip inkluze a exkluze—motivace

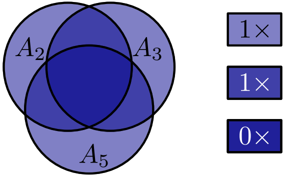
Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

- Zaveďme si $A_k := \{n \in [10000] \colon k|n\}$. Chceme $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Snadno spočteme:

- $|A_2| = 10000/2 = 5000$
- $|A_3| = 9999/3 = 3333$
- $|A_5| = 10000/5 = 2000$
- Co vyjadřuje $|A_2| + |A_3| + |A_5|$?
- Dále $|A_2 \cap A_3| = |A_6| = \frac{9996}{6} = 1666$; $|A_2 \cap A_5| = 1000$; $|A_3 \cap A_5| = \frac{9990}{15} = 2\frac{9990}{30} = 666$.
- Co dá $|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5|$?



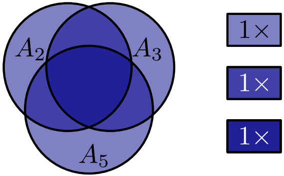
Princip inkluze a exkluze—motivace

Příklad

Kolik je přirozených čísel v intervalu $[1, 10000]$ takových, že jsou dělitelná 2, 3 nebo 5?

- Zaveďme si $A_k := \{n \in [10000] \colon k | n\}$. Chceme $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Snadno spočteme:



- $|A_2| = 10000/2 = 5000$
- $|A_3| = 9999/3 = 3333$
- $|A_5| = 10000/5 = 2000$
- Co vyjadřuje $|A_2| + |A_3| + |A_5|$?
- Dále $|A_2 \cap A_3| = |A_6| = \frac{9996}{6} = 1666$; $|A_2 \cap A_5| = 1000$; $|A_3 \cap A_5| = \frac{9990}{15} = 2\frac{9990}{30} = 666$.
- Co dá $|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5|$?
- Nakonec: $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| -$
  $- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$.

Princip inkluze a exkluze

Obecný vzorec:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \dots \cup A_n| = {} & |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\
& - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots \\
& \vdots \\
& + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.
\end{aligned}
$$

Princip inkluze a exkluze

Obecný vzorec:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = {} & |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
& - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots \\
& \vdots \\
& + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}
$$

Zjednodušený zápis:

$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$

Princip inkluze a exkluze

Obecný vzorec:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots \\
&\vdots \\
&+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}
$$

Zjednodušený zápis:
$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$

Věta (Princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Důkaz principu inkluze a exkluze

Věta (Princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|.$$

Důkaz principu inkluze a exkluze

Věta (Princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|.$$

Důkaz.

- Mějme $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ a počítejme, kolikrát přispěje na pravou stranu (potřebujeme, že jednou).

Důkaz principu inkluze a exkluze

Věta (Princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|.$$

Důkaz.

- Mějme $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ a počítejme, kolikrát přispěje na pravou stranu (potřebujeme, že jednou).
- Předpokládejme, že x náleží přesně do j množin z $A_1, \ldots, A_n$, konkrétně do $A_{i_1}, \ldots, A_{i_j}$.

Důkaz principu inkluze a exkluze

Věta (Princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|.$$

Důkaz.

- Mějme $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ a počítejme, kolikrát přispěje na pravou stranu (potřebujeme, že jednou).
- Předpokládejme, že x náleží přesně do j množin z $A_1, \ldots, A_n$, konkrétně do $A_{i_1}, \ldots, A_{i_j}$.
- Nechť $J = \{i_1, \ldots, i_j\}$. Potom $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow I \subseteq J$.

Důkaz principu inkluze a exkluze

Věta (Princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|.$$

Důkaz.

- Mějme $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ a počítejme, kolikrát přispěje na pravou stranu (potřebujeme, že jednou).
- Předpokládejme, že x náleží přesně do j množin z $A_1, \dots, A_n$, konkrétně do $A_{i_1}, \dots, A_{i_j}$.
- Nechť $J = \{i_1, \dots, i_j\}$. Potom $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow I \subseteq J$.
- Tedy x je na pravé straně započteno $\sum_{I \subseteq J, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1}$-krát.

Důkaz principu inkluze a exkluze

Věta (Princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|.$$

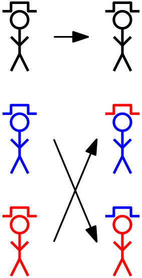
Důkaz.

- Mějme $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ a počítejme, kolikrát přispěje na pravou stranu (potřebujeme, že jednou).
- Předpokládejme, že x náleží přesně do j množin z $A_1, \ldots, A_n$, konkrétně do $A_{i_1}, \ldots, A_{i_j}$.
- Nechť $J = \{i_1, \ldots, i_j\}$. Potom $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow I \subseteq J$.
- Tedy x je na pravé straně započteno $\sum_{I \subseteq J, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1}$-krát.
- $\displaystyle\sum_{\substack{I \subseteq J \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} = \sum_{\substack{I \subseteq J \\ |I| \text{ liché}}} 1 - \sum_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq J \\ |I| \text{ sudé}}} 1 = \sum_{\substack{I \subseteq J \\ |I| \text{ sudé}}} 1 - \sum_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq J \\ |I| \text{ sudé}}} 1 = 1$ $\square$

Problém šatnářky

Příklad (Problém šatnářky)

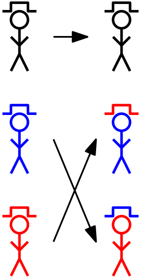
Mějme n pánů, kteří si odloží svůj klobouk u roztržité šatnářky. Ta klobouky při vracení náhodně pomíchá. Jaká je pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane svůj klobouk.



Problém šatnářky

Příklad (Problém šatnářky)

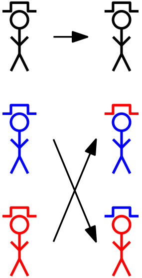
Mějme n pánů, kteří si odloží svůj klobouk u roztržité šatnářky. Ta klobouky při vracení náhodně pomíchá. Jaká je pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane svůj klobouk.



Reformulace:

- Pánové $1, \dots, n$, klobouky $1, \dots, n$, šatnářka: pánovi i vrací klobouk $\pi(i)$, kde π je permutace $[n]$.

Problém šatnářky



Příklad (Problém šatnářky)

Mějme n pánů, kteří si odloží svůj klobouk u roztržité šatnářky. Ta klobouky při vracení náhodně pomíchá. Jaká je pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane svůj klobouk.

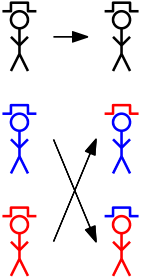
Reformulace:

- Pánové $1, \ldots, n$, klobouky $1, \ldots, n$, šatnářka: pánovi i vrací klobouk $\pi(i)$, kde π je permutace $[n]$.
- Pevný bod permutace π je číslo $i \in [n]$ takové, že $\pi(i) = i$.

Problém šatnářky

Příklad (Problém šatnářky)

Mějme n pánů, kteří si odloží svůj klobouk u roztržité šatnářky. Ta klobouky při vracení náhodně pomíchá. Jaká je pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane svůj klobouk.



Reformulace:

- Pánové $1, \dots, n$, klobouky $1, \dots, n$, šatnářka: pánovi i vrací klobouk $\pi(i)$, kde π je permutace $[n]$.
- Pevný bod permutace π je číslo $i \in [n]$ takové, že $\pi(i) = i$.
- Žádný pán nedostane svůj klobouk, právě když π nemá žádný pevný bod.

Definice

Šatnářčino číslo $š(n)$ je počet permutací $[n]$ bez pevného bodu.

Určování šatnářčina čísla

Definice

Šatnářčino číslo $\check{s}(n)$ je počet permutací $[n]$ bez pevného bodu.

Určování šatnářčina čísla

Definice

Šatnářčino číslo $š(n)$ je počet permutací $[n]$ bez pevného bodu.

Věta (O šatnářce)

$$š(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Určování šatnářčina čísla

Definice

Šatnářčino číslo $š(n)$ je počet permutací $[n]$ bez pevného bodu.

Věta (O šatnářce)

$$š(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

- Pro úplnost k původní úloze: Pravděpodobnost, že permutace nemá pevný bod = počet permutací bez pevného bodu/počet všech permutací. Tj $š(n)/n!$.

Určování šatnářčina čísla

Definice

Šatnářčino číslo $š(n)$ je počet permutací $[n]$ bez pevného bodu.

Věta (O šatnářce)

$$š(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

- Pro úplnost k původní úloze: Pravděpodobnost, že permutace nemá pevný bod = počet permutací bez pevného bodu/počet všech permutací. Tj $š(n)/n!$.
- Tedy věta o šatnářce dává: $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$.

Určování šatnářčina čísla

Definice

Šatnářčino číslo $\check{s}(n)$ je počet permutací $[n]$ bez pevného bodu.

Věta (O šatnářce)

$$\check{s}(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

- Pro úplnost k původní úloze: Pravděpodobnost, že permutace nemá pevný bod = počet permutací bez pevného bodu/počet všech permutací. Tj $\check{s}(n)/n!$.
- Tedy věta o šatnářce dává: $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$.
- Pomocí prostředků matematické analýzy: $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \approx e^{-1} \approx 0,3679$.

Důkaz věty o šatnářce

Věta (O šatnářce)

$$\check{s}(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Důkaz věty o šatnářce

Věta (O šatnářce)

$$\check{s}(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Důkaz.

- Určíme počet permutací s pevným bodem (a na závěr je odpočteme ode všech).

Důkaz věty o šatnářce

Věta (O šatnářce)

$$š(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Důkaz.

- Určíme počet permutací s pevným bodem (a na závěr je odpočteme ode všech).
- Nechť A_i je množina všech permutací $[n]$, které mají pevný bod i. Chceme $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.

Důkaz věty o šatnářce

Věta (O šatnářce)

$$\check{s}(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Důkaz.

- Určíme počet permutací s pevným bodem (a na závěr je odpočteme ode všech).
- Nechť A_i je množina všech permutací $[n]$, které mají pevný bod i. Chceme $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.
- Podle PIE: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$.

Důkaz věty o šatnářce

Věta (O šatnářce)

$$š(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Důkaz.

- Určíme počet permutací s pevným bodem (a na závěr je odpočteme ode všech).
- Nechť A_i je množina všech permutací $[n]$, které mají pevný bod i. Chceme $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.
- Podle PIE: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$.
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ je množina všech permutací, pro něž jsou všechna $i \in I$ pevné body, tj. $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (n-k)!$, když $|I| = k$.

Důkaz věty o šatnářce

Věta (O šatnářce)

$$\check{s}(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Důkaz.

- Určíme počet permutací s pevným bodem (a na závěr je odpočteme ode všech).
- Nechť A_i je množina všech permutací $[n]$, které mají pevný bod i. Chceme $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.
- Podle PIE: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$.
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ je množina všech permutací, pro něž jsou všechna $i \in I$ pevné body, tj. $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (n-k)!$, když $|I| = k$.
- $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} (n-k)! =$

Důkaz věty o šatnářce

Věta (O šatnářce)

$$š(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Důkaz.

- Určíme počet permutací s pevným bodem (a na závěr je odpočteme ode všech).
- Nechť A_i je množina všech permutací $[n]$, které mají pevný bod i. Chceme $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.
- Podle PIE: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$.
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ je množina všech permutací, pro něž jsou všechna $i \in I$ pevné body, tj. $\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = (n-k)!$, když $|I| = k$.
- $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} (n-k)! =$
  $= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$

Důkaz věty o šatnářce

Věta (O šatnářce)

$$\check{s}(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Důkaz.

- Určíme počet permutací s pevným bodem (a na závěr je odpočteme ode všech).
- Nechť A_i je množina všech permutací $[n]$, které mají pevný bod i. Chceme $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.
- Podle PIE: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$.
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ je množina všech permutací, pro něž jsou všechna $i \in I$ pevné body, tj. $\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = (n-k)!$, když $|I| = k$.
- $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} (n-k)! =$
  $= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$
- $\check{s}(n) = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n!(1 - \frac{1}{1!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$. □

Odhady faktoriálu.

Tvrzení (Snadné odhady faktoriálu)

$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

Odhady faktoriálu.

Tvrzení (Snadné odhady faktoriálu)

$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

Důkaz.

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n} = n^n$

Odhady faktoriálu.

Tvrzení (Snadné odhady faktoriálu)

$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

Důkaz.

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n} = n^n$
- Pro druhou nerovnost ukážeme $(n!)^2 \geq n^n$.

Odhady faktoriálu.

Tvrzení (Snadné odhady faktoriálu)

$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

Důkaz.

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n} = n^n$
- Pro druhou nerovnost ukážeme $(n!)^2 \geq n^n$.
- $(n!)^2 = [n \cdot 1] \cdot [(n-1) \cdot 2] \cdot [(n-2) \cdot 3] \cdots [1 \cdot n]$
- Chceme $\forall i \in [n]$: $(n - i + 1) \cdot i \geq n$. Stačí pro $i \leq (n+1)/2$, jinak symetrické.

Odhady faktoriálu.

Tvrzení (Snadné odhady faktoriálu)

$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

Důkaz.

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n} = n^n$
- Pro druhou nerovnost ukážeme $(n!)^2 \geq n^n$.
- $(n!)^2 = [n \cdot 1] \cdot [(n-1) \cdot 2] \cdot [(n-2) \cdot 3] \cdots [1 \cdot n]$
- Chceme $\forall i \in [n]$: $(n - i + 1) \cdot i \geq n$. Stačí pro $i \leq (n+1)/2$, jinak symetrické.
- Zjevné pro $i = 1$. Pro $i \geq 2$ máme $(n - i + 1) \cdot i \geq \frac{n+1}{2} \cdot 2 > n$.

$\square$

Odhady faktoriálu.

Tvrzení (Snadné odhady faktoriálu)

$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

Důkaz.

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n} = n^n$
- Pro druhou nerovnost ukážeme $(n!)^2 \geq n^n$.
- $(n!)^2 = [n \cdot 1] \cdot [(n-1) \cdot 2] \cdot [(n-2) \cdot 3] \cdots [1 \cdot n]$
- Chceme $\forall i \in [n]$: $(n - i + 1) \cdot i \geq n$. Stačí pro $i \leq (n+1)/2$, jinak symetrické.
- Zjevné pro $i = 1$. Pro $i \geq 2$ máme $(n - i + 1) \cdot i \geq \frac{n+1}{2} \cdot 2 > n$.

$\square$

- Lepší odhad: $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Odhady faktoriálu.

Tvrzení (Snadné odhady faktoriálu)

$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

Důkaz.

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n} = n^n$
- Pro druhou nerovnost ukážeme $(n!)^2 \geq n^n$.
- $(n!)^2 = [n \cdot 1] \cdot [(n-1) \cdot 2] \cdot [(n-2) \cdot 3] \cdots [1 \cdot n]$
- Chceme $\forall i \in [n]$: $(n-i+1) \cdot i \geq n$. Stačí pro $i \leq (n+1)/2$, jinak symetrické.
- Zjevné pro $i = 1$. Pro $i \geq 2$ máme $(n-i+1) \cdot i \geq \frac{n+1}{2} \cdot 2 > n$.

$\square$

- Lepší odhad: $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
- Stirlingova formule: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Odhady kombinačních čísel

Tvrzení (Snadné odhady kombinačních čísel)

Pro každé $n \geq k \geq 1$ *máme* $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.

Odhady kombinačních čísel

Tvrzení (Snadné odhady kombinačních čísel)

Pro každé $n \geq k \geq 1$ *máme* $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.

Důkaz.

- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.

Odhady kombinačních čísel

Tvrzení (Snadné odhady kombinačních čísel)

Pro každé $n \geq k \geq 1$ *máme* $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.

Důkaz.

- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \cdots \frac{n-k+1}{1}$.

Odhady kombinačních čísel

Tvrzení (Snadné odhady kombinačních čísel)

Pro každé $n \geq k \geq 1$ máme $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.

Důkaz.

- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \cdots \frac{n-k+1}{1}$.
- Chceme $\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (jasné pro $i = 0$).

Odhady kombinačních čísel

Tvrzení (Snadné odhady kombinačních čísel)

Pro každé $n \geq k \geq 1$ máme $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.

Důkaz.

- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \cdots \frac{n-k+1}{1}$.
- Chceme $\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (jasné pro $i = 0$).
- Ekvivalentně $(n-i)k \geq n(k-i) \Leftrightarrow -ik \geq -in \Leftrightarrow k \leq n$.

Odhady kombinačních čísel

Tvrzení (Snadné odhady kombinačních čísel)

Pro každé $n \geq k \geq 1$ máme $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.

Důkaz.

- $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 1} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$.
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \cdots \frac{n-k+1}{1}$.
- Chceme $\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (jasné pro $i = 0$).
- Ekvivalentně $(n-i)k \geq n(k-i) \Leftrightarrow -ik \geq -in \Leftrightarrow k \leq n$.
- Tedy $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geq \underbrace{\frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdots \frac{n}{k}}_{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k$. $\square$

Prostřední kombinační číslo

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}$.

Prostřední kombinační číslo

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$.
- Máme $\frac{n-k+1}{k} \begin{cases} > 1 \text{ pokud } k < (n+1)/2 \\ < 1 \text{ pokud } k > (n+1)/2 \end{cases}$

Prostřední kombinační číslo

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}.$
- Máme $\frac{n-k+1}{k} \begin{cases} > 1 \text{ pokud } k < (n+1)/2 \\ < 1 \text{ pokud } k > (n+1)/2 \end{cases}$
- Odtud dostáváme
  $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$

Prostřední kombinační číslo

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$.
- Máme $\frac{n-k+1}{k} \begin{cases} > 1 \text{ pokud } k < (n+1)/2 \\ < 1 \text{ pokud } k > (n+1)/2 \end{cases}$
- Odtud dostáváme $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$.
- Jinými slovy: Největší kombinační číslo (při pevném n) je prostřední $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

Prostřední kombinační číslo

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$.
- Máme $\frac{n-k+1}{k} \begin{cases} > 1 \text{ pokud } k < (n+1)/2 \\ < 1 \text{ pokud } k > (n+1)/2 \end{cases}$
- Odtud dostáváme
  $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$.
- Jinými slovy: Největší kombinační číslo (při pevném n) je prostřední $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.
- Binomická věta: $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

Prostřední kombinační číslo

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$.
- Máme $\frac{n-k+1}{k} \begin{cases} > 1 \text{ pokud } k < (n+1)/2 \\ < 1 \text{ pokud } k > (n+1)/2 \end{cases}$
- Odtud dostáváme
  $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$.
- Jinými slovy: Největší kombinační číslo (při pevném n) je prostřední $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.
- Binomická věta: $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.
- Odtud: $\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^n$.

Prostřední kombinační číslo

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}.$
- Máme $\frac{n-k+1}{k} \begin{cases} > 1 \text{ pokud } k < (n+1)/2 \\ < 1 \text{ pokud } k > (n+1)/2 \end{cases}$
- Odtud dostáváme
  $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$
- Jinými slovy: Největší kombinační číslo (při pevném n) je prostřední $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.
- Binomická věta: $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.
- Odtud: $\frac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \le 2^n$.
- Pozn. Strilingova formule vede k: $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$.