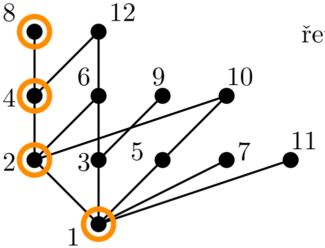
Připomenutí: řetězce a antiřetězce

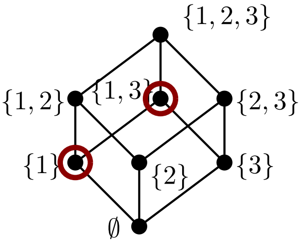
Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné. Antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ taková, že žádné dva její různe prvky nejsou porovnatelné. Uspořádání je lineární (též úplné), pokud X je řetězec.



$([12], |)$

řetězce

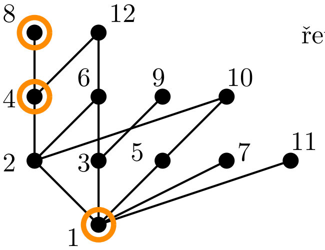


$(2^{[3]}, \subseteq)$

Připomenutí: řetězce a antiřetězce

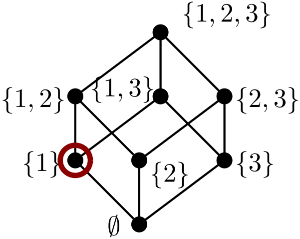
Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné. Antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ taková, že žádné dva její různe prvky nejsou porovnatelné. Uspořádání je lineární (též úplné), pokud X je řetězec.



$([12], |)$

řetězce

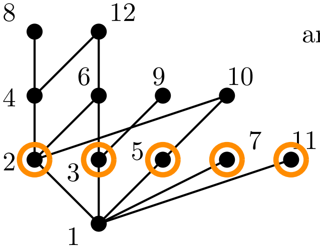


$(2^{[3]}, \subseteq)$

Připomenutí: řetězce a antiřetězce

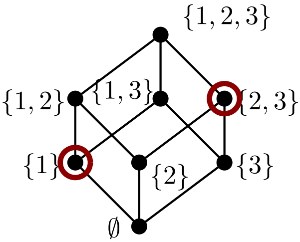
Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné. Antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ taková, že žádné dva její různe prvky nejsou porovnatelné. Uspořádání je lineární (též úplné), pokud X je řetězec.



$([12], |)$

antiřetězce



$(2^{[3]}, \subseteq)$

Extremální prvky ČUM

Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina.

- Prvek $x \in X$ je **největší**, pokud pro každé $y \in X$ máme $y \preceq x$;

Extremální prvky ČUM

Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina.

- Prvek $x \in X$ je největší, pokud pro každé $y \in X$ máme $y \preceq x$;
- Prvek $x \in X$ je maximální, pokud neexistuje $y \in X$ takové, že $y \succ x$.

Extremální prvky ČUM

Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina.

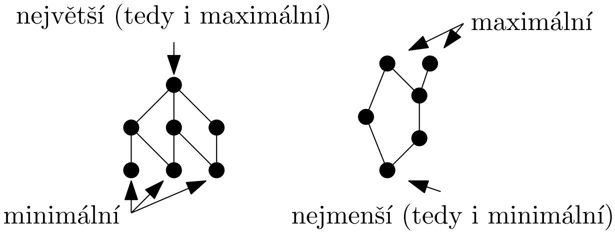
- Prvek $x \in X$ je největší, pokud pro každé $y \in X$ máme $y \preceq x$;
- Prvek $x \in X$ je maximální, pokud neexistuje $y \in X$ takové, že $y \succ x$.
- Analogicky definujeme nejmenší a minimální prvek.

Extremální prvky ČUM

Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina.

- Prvek $x \in X$ je největší, pokud pro každé $y \in X$ máme $y \preceq x$;
- Prvek $x \in X$ je maximální, pokud neexistuje $y \in X$ takové, že $y \succ x$.
- Analogicky definujeme nejmenší a minimální prvek.

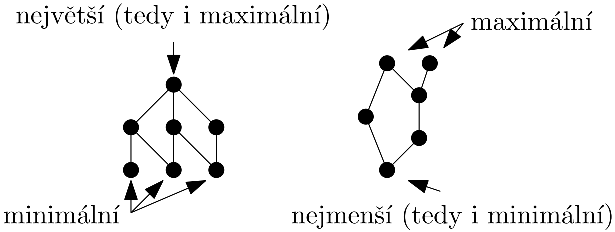


Extremální prvky ČUM

Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina.

- Prvek $x \in X$ je **největší**, pokud pro každé $y \in X$ máme $y \preceq x$;
- Prvek $x \in X$ je **maximální**, pokud neexistuje $y \in X$ takové, že $y \succ x$.
- Analogicky definujeme **nejmenší** a **minimální** prvek.



Pozorování

x největší $\Rightarrow$ x maximální; x nejmenší $\Rightarrow$ x minimální

Drobné cvičení

Cvičení

Konečná ČUM $(X, \preceq)$ má největší prvek $\Leftrightarrow$ má právě jeden maximální prvek.
Dále, která z implikací platí pro nekonečnou ČUM?

Věta o dlouhém a širokém

Věta (o dlouhém a širokém; též výška-šířka nerovnost)

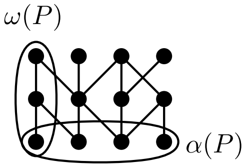
Nechť $P = (X, \preceq)$ *je konečná částečně uspořádaná množina. Nechť* $\alpha(P)$ *značí největší možnou velikost antiřetězce v* P *a* $\omega(P)$ *značí největší možnou velikost řetězce v* P*. Potom* $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$*.*

Věta o dlouhém a širokém

Věta (o dlouhém a širokém; též výška-šířka nerovnost)

Nechť $P = (X, \preceq)$ je konečná částečně uspořádaná množina. Nechť $\alpha(P)$ značí největší možnou velikost antiřetězce v P a $\omega(P)$ značí největší možnou velikost řetězce v P. Potom $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.

Příklad, kdy $|X| = \alpha(P)\omega(P)$:

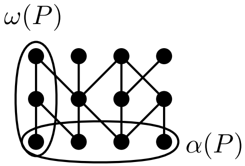


Věta o dlouhém a širokém

Věta (o dlouhém a širokém; též výška-šířka nerovnost)

Nechť $P = (X, \preceq)$ je konečná částečně uspořádaná množina. Nechť $\alpha(P)$ značí největší možnou velikost antiřetězce v P a $\omega(P)$ značí největší možnou velikost řetězce v P. Potom $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.

Příklad, kdy $|X| = \alpha(P)\omega(P)$:



Varování: Nikdo ale netvrdí, že v obecnosti je $\alpha(P)$ velikost nějaké vrstvy v Hasseově diagramu.

Důkaz věty o dlouhém a širokém

Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!

Důkaz věty o dlouhém a širokém

Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!
- 1. krok: Když $\omega(P) = 0$, pak $X = \emptyset$, čili $|X| = 0 = \alpha(P)\omega(P)$.

Důkaz věty o dlouhém a širokém

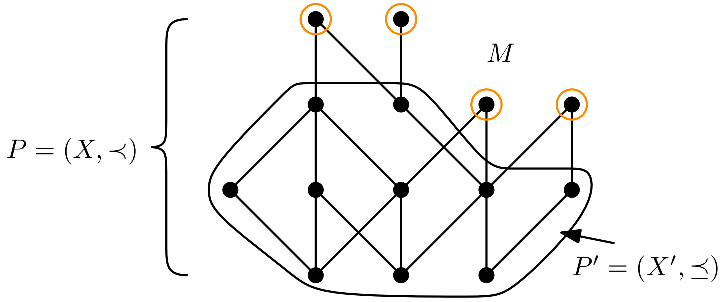
Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!
- 1. krok: Když $\omega(P) = 0$, pak $X = \emptyset$, čili $|X| = 0 = \alpha(P)\omega(P)$.
- 2. Krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro P' s $\omega(P') \leq \omega_0$. Budeme dokazovat pro P s $\omega(P) = \omega_0 + 1$.

Důkaz věty o dlouhém a širokém

Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!
- 1. krok: Když $\omega(P) = 0$, pak $X = \emptyset$, čili $|X| = 0 = \alpha(P)\omega(P)$.
- 2. Krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro P' s $\omega(P') \leq \omega_0$. Budeme dokazovat pro P s $\omega(P) = \omega_0 + 1$.
- Nechť M je množina maximálních prvků P a nechť $P' = (X', \preceq)$ vznikne z P odebráním prvků M.


$P = (X, \prec)$
M
$P' = (X', \preceq)$

Důkaz věty o dlouhém a širokém

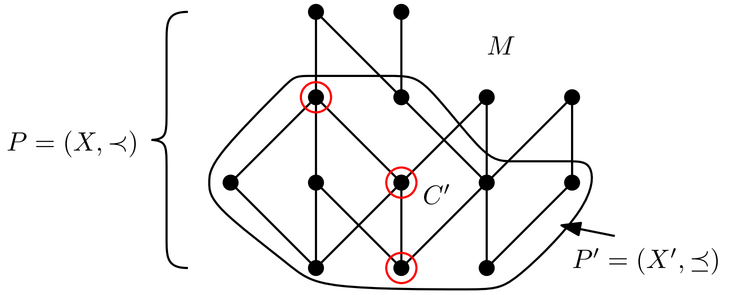
Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!
- 1. krok: Když $\omega(P) = 0$, pak $X = \emptyset$, čili $|X| = 0 = \alpha(P)\omega(P)$.
- 2. Krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro P' s $\omega(P') \leq \omega_0$. Budeme dokazovat pro P s $\omega(P) = \omega_0 + 1$.
- Nechť M je množina maximálních prvků P a nechť $P' = (X', \preceq)$ vznikne z P odebráním prvků M.
- Pozorování: M je antiřetězec, tedy $|M| \leq \alpha(P)$.

Důkaz věty o dlouhém a širokém

Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!
- 1. krok: Když $\omega(P) = 0$, pak $X = \emptyset$, čili $|X| = 0 = \alpha(P)\omega(P)$.
- 2. Krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro P' s $\omega(P') \leq \omega_0$. Budeme dokazovat pro P s $\omega(P) = \omega_0 + 1$.
- Nechť M je množina maximálních prvků P a nechť $P' = (X', \preceq)$ vznikne z P odebráním prvků M.
- Pozorování: M je antiřetězec, tedy $|M| \leq \alpha(P)$.
- Pozorování: $\omega(P') \leq \omega_0 = \omega(P) - 1$. (Je-li maximální C' řetězec v P', potom ho lze prodloužit o alespoň jeden prvek na řetězec C v P, jinak by maximální prvek C' patřil do M.)


$P = (X, \prec)$
M
C'
$P' = (X', \preceq)$

Důkaz věty o dlouhém a širokém

Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!
- 1. krok: Když $\omega(P) = 0$, pak $X = \emptyset$, čili $|X| = 0 = \alpha(P)\omega(P)$.
- 2. Krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro P' s $\omega(P') \leq \omega_0$. Budeme dokazovat pro P s $\omega(P) = \omega_0 + 1$.
- Nechť M je množina maximálních prvků P a nechť $P' = (X', \preceq)$ vznikne z P odebráním prvků M.
- Pozorování: M je antiřetězec, tedy $|M| \leq \alpha(P)$.
- Pozorování: $\omega(P') \leq \omega_0 = \omega(P) - 1$. (Je-li maximální C' řetězec v P', potom ho lze prodloužit o alespoň jeden prvek na řetězec C v P, jinak by maximální prvek C' patřil do M.)
- Pozorování: $\alpha(P') \leq \alpha(P)$ (Antiřet. v P' je antiřet. v P.)

Důkaz věty o dlouhém a širokém

Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!
- 1. krok: Když $\omega(P) = 0$, pak $X = \emptyset$, čili $|X| = 0 = \alpha(P)\omega(P)$.
- 2. Krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro P' s $\omega(P') \leq \omega_0$. Budeme dokazovat pro P s $\omega(P) = \omega_0 + 1$.
- Nechť M je množina maximálních prvků P a nechť $P' = (X', \preceq)$ vznikne z P odebráním prvků M.
- Pozorování: M je antiřetězec, tedy $|M| \leq \alpha(P)$.
- Pozorování: $\omega(P') \leq \omega_0 = \omega(P) - 1$. (Je-li maximální C' řetězec v P', potom ho lze prodloužit o alespoň jeden prvek na řetězec C v P, jinak by maximální prvek C' patřil do M.)
- Pozorování: $\alpha(P') \leq \alpha(P)$ (Antiřet. v P' je antiřet. v P.)
- Pak: $|X| = |M| + |X'| \leq \alpha(P) + |X'| \leq \alpha(P) + \alpha(P')\omega(P') \leq$

Důkaz věty o dlouhém a širokém

Důkaz. (Dokazujeme $|X| \leq \alpha(P)\omega(P)$.)

- Indukcí podle $\omega(P)$, začneme od nuly!
- 1. krok: Když $\omega(P) = 0$, pak $X = \emptyset$, čili $|X| = 0 = \alpha(P)\omega(P)$.
- 2. Krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro P' s $\omega(P') \leq \omega_0$. Budeme dokazovat pro P s $\omega(P) = \omega_0 + 1$.
- Nechť M je množina maximálních prvků P a nechť $P' = (X', \preceq)$ vznikne z P odebráním prvků M.
- Pozorování: M je antiřetězec, tedy $|M| \leq \alpha(P)$.
- Pozorování: $\omega(P') \leq \omega_0 = \omega(P) - 1$. (Je-li maximální C' řetězec v P', potom ho lze prodloužit o alespoň jeden prvek na řetězec C v P, jinak by maximální prvek C' patřil do M.)
- Pozorování: $\alpha(P') \leq \alpha(P)$ (Antiřet. v P' je antiřet. v P.)
- Pak: $|X| = |M| + |X'| \leq \alpha(P) + |X'| \leq \alpha(P) + \alpha(P')\omega(P') \leq$ $\leq \alpha(P) + \alpha(P)(\omega(P) - 1) = \alpha(P)\omega(P)$. $\square$

Kombinatorické počítání—počet funkcí

Tvrzení (o počtu funkcí)

Jsou-li M *a* N *konečné množiny,* $m := |M|$, $n := |N|$, *potom počet všech funkcí* $f : N \to M$ *je* m^n.

Kombinatorické počítání—počet funkcí

Tvrzení (o počtu funkcí)

Jsou-li M a N konečné množiny, $m := |M|$, $n := |N|$, potom počet všech funkcí $f : N \to M$ je m^n.

Důkaz.

- Nechť $N = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Kombinatorické počítání—počet funkcí

Tvrzení (o počtu funkcí)

Jsou-li M a N konečné množiny, $m := |M|$, $n := |N|$, potom počet všech funkcí $f : N \to M$ je m^n.

Důkaz.

- Nechť $N = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Funkce $f : N \to M$ je jednoznačně určena n-ticí $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in M^n = M \times M \times \cdots \times M$ (n-krát).

Kombinatorické počítání—počet funkcí

Tvrzení (o počtu funkcí)

Jsou-li M a N konečné množiny, $m := |M|$, $n := |N|$, potom počet všech funkcí $f: N \to M$ je m^n.

Důkaz.

- Nechť $N = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Funkce $f: N \to M$ je jednoznačně určena n-ticí $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in M^n = M \times M \times \cdots \times M$ (n-krát).
- Každá taková n-tice určuje přesně jednu funkci.

Kombinatorické počítání—počet funkcí

Tvrzení (o počtu funkcí)

Jsou-li M a N konečné množiny, $m := |M|$, $n := |N|$, potom počet všech funkcí $f: N \to M$ je m^n.

Důkaz.

- Nechť $N = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Funkce $f: N \to M$ je jednoznačně určena n-ticí $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in M^n = M \times M \times \cdots \times M$ (n-krát).
- Každá taková n-tice určuje přesně jednu funkci.
- Tedy počet $f: N \to M$ je roven $|M^n| = m^n$. $\square$

Kombinatorické počítání—počet funkcí

Tvrzení (o počtu funkcí)

Jsou-li M a N konečné množiny, $m := |M|$, $n := |N|$, potom počet všech funkcí $f\colon N \to M$ je m^n.

Důkaz.

- Nechť $N = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Funkce $f\colon N \to M$ je jednoznačně určena n-ticí $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in M^n = M \times M \times \dots \times M$ (n-krát).
- Každá taková n-tice určuje přesně jednu funkci.
- Tedy počet $f\colon N \to M$ je roven $|M^n| = m^n$. $\square$

Poznámka

- Musíme se dohodnout z čeho vycházíme—je $|M^n| = m^n$ zjevné?
- Pokud $a = |A|$ a $b = |B|$, potom $|A \times B| = ab$ indukcí dle a.
- Dále $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$ indukcí dle n.

Kombinatorické počítání—počet podmnožin

Tvrzení (o počtu podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, potom N má přesně 2^n podmnožin.

Důkaz.

- Najdeme bijekci mezi podmnožinami N a funkcemi $f : N \to \{0, 1\}$.

Kombinatorické počítání—počet podmnožin

Tvrzení (o počtu podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, potom N má přesně 2^n podmnožin.

Důkaz.

- Najdeme bijekci mezi podmnožinami N a funkcemi $f : N \to \{0, 1\}$.
- Takových funkcí je 2^n.

Kombinatorické počítání—počet podmnožin

Tvrzení (o počtu podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, potom N má přesně 2^n podmnožin.

Důkaz.

- Najdeme bijekci mezi podmnožinami N a funkcemi $f : N \to \{0, 1\}$.
- Takových funkcí je 2^n.
- Je-li $A \subseteq N$, přiřadíme ji jeji charakteristickou funkci $\chi_A : N \to \{0, 1\}$ definovanou jako $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ když } x \in A, \\ 0 \text{ když } x \notin A. \end{cases}$

Kombinatorické počítání—počet podmnožin

Tvrzení (o počtu podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, potom N má přesně 2^n podmnožin.

Důkaz.

- Najdeme bijekci mezi podmnožinami N a funkcemi $f: N \to \{0,1\}$.
- Takových funkcí je 2^n.
- Je-li $A \subseteq N$, přiřadíme ji jeji charakteristickou funkci $\chi_A: N \to \{0,1\}$ definovanou jako $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ když } x \in A, \\ 0 \text{ když } x \notin A. \end{cases}$
- Přiřazení je prosté: Je-li $A \neq B$, pak exisutje $x \in N$, které je v právě jedné z množin A, B. Tedy $\chi_A(x) \neq \chi_B(x) \Rightarrow \chi_A \neq \chi_B$.

Kombinatorické počítání—počet podmnožin

Tvrzení (o počtu podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, potom N má přesně 2^n podmnožin.

Důkaz.

- Najdeme bijekci mezi podmnožinami N a funkcemi $f\colon N \to \{0,1\}$.
- Takových funkcí je 2^n.
- Je-li $A \subseteq N$, přiřadíme ji jeji charakteristickou funkci $\chi_A\colon N \to \{0,1\}$ definovanou jako $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ když } x \in A, \\ 0 \text{ když } x \notin A. \end{cases}$
- Přiřazení je prosté: Je-li $A \neq B$, pak exisutje $x \in N$, které je v právě jedné z množin A, B. Tedy $\chi_A(x) \neq \chi_B(x) \Rightarrow \chi_A \neq \chi_B$.
- Přiřazení je na: Je-li $f\colon N \to \{0,1\}$, potom $f = \chi_A$, kde $A := \{x \in N\colon f(x) = 1\}$. $\square$

Kombinatorické počítání—počet sudých/lichých podmnožin

Tvrzení (o počtu sudých a lichých podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, $n \geq 1$. Potom N má přesně 2^{n-1} podmnožin sudé velikosti a 2^{n-1} podmnožin liché velikosti.

Důkaz.

- Ukážeme, že N má stejný počet sudých a lichých podmnožin.

Kombinatorické počítání—počet sudých/lichých podmnožin

Tvrzení (o počtu sudých a lichých podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, $n \geq 1$. Potom N má přesně 2^{n-1} podmnožin sudé velikosti a 2^{n-1} podmnožin liché velikosti.

Důkaz.

- Ukážeme, že N má stejný počet sudých a lichých podmnožin.
- Zvolme pevně $a \in N$ a uvažujme funkci $\Psi\colon 2^N \to 2^N$ definovanou jakou $\Psi(A) := A \triangle \{a\}$.

Kombinatorické počítání—počet sudých/lichých podmnožin

Tvrzení (o počtu sudých a lichých podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, $n \geq 1$. Potom N má přesně 2^{n-1} podmnožin sudé velikosti a 2^{n-1} podmnožin liché velikosti.

Důkaz.

- Ukážeme, že N má stejný počet sudých a lichých podmnožin.
- Zvolme pevně $a \in N$ a uvažujme funkci $\Psi \colon 2^N \to 2^N$ definovanou jakou $\Psi(A) := A \triangle \{a\}$.
- Ψ převádí sudé podmnožiny n liché a naopak, a je to bijekce mezi sudými a lichými podmnožinami, neboť $\Psi(\Psi(A)) = A$.

Kombinatorické počítání—počet sudých/lichých podmnožin

Tvrzení (o počtu sudých a lichých podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, $n \geq 1$. Potom N má přesně 2^{n-1} podmnožin sudé velikosti a 2^{n-1} podmnožin liché velikosti.

Důkaz.

- Ukážeme, že N má stejný počet sudých a lichých podmnožin.
- Zvolme pevně $a \in N$ a uvažujme funkci $\Psi\colon 2^N \to 2^N$ definovanou jakou $\Psi(A) := A \triangle \{a\}$.
- Ψ převádí sudé podmnožiny n liché a naopak, a je to bijekce mezi sudými a lichými podmnožinami, neboť $\Psi(\Psi(A)) = A$.
- Podrobněji, Ψ prostá:
  $\Psi(A) = \Psi(B) \Rightarrow \Psi(\Psi(A)) = \Psi(\Psi(B)) \Rightarrow A = B$.

Kombinatorické počítání—počet sudých/lichých podmnožin

Tvrzení (o počtu sudých a lichých podmnožin)

Nechť N je n-prvková množina, $n \geq 1$. Potom N má přesně 2^{n-1} podmnožin sudé velikosti a 2^{n-1} podmnožin liché velikosti.

Důkaz.

- Ukážeme, že N má stejný počet sudých a lichých podmnožin.
- Zvolme pevně $a \in N$ a uvažujme funkci $\Psi\colon 2^N \to 2^N$ definovanou jakou $\Psi(A) := A \triangle \{a\}$.
- Ψ převádí sudé podmnožiny n liché a naopak, a je to bijekce mezi sudými a lichými podmnožinami, neboť $\Psi(\Psi(A)) = A$.
- Podrobněji, Ψ prostá:
  $\Psi(A) = \Psi(B) \Rightarrow \Psi(\Psi(A)) = \Psi(\Psi(B)) \Rightarrow A = B$.
- Ψ na: Je-li $X \subseteq N$, chceme $Y \subseteq N$, že $\Psi(Y) = X$. Stačí volit $Y = \Psi(X)$, pak $\Psi(Y) = \Psi(\Psi(X)) = X$. $\square$

Kominatorické počítání–počet prostých zobrazení

Tvrzení (o počtu prostých zobrazení)

Nechť N je n-prvková množina a M je m-prvková. Potom existuje právě $m(m-1)\cdots(m-n+1)=\prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$ *prostých zobrazení z N do M.*

Kominatorické počítání–počet prostých zobrazení

Tvrzení (o počtu prostých zobrazení)

Nechť N je n-prvková množina a M je m-prvková. Potom existuje právě $m(m-1)\cdots(m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$ *prostých zobrazení z N do M.*

Důkaz (trochu neformální).

- Je-li $n > m$, potom prostých funkcí je 0, což odpovídá výrazu.

Kominatorické počítání–počet prostých zobrazení

Tvrzení (o počtu prostých zobrazení)

Nechť N je n-prvková množina a M je m-prvková. Potom existuje právě $m(m-1)\cdots(m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$ prostých zobrazení z N do M.

Důkaz (trochu neformální).

- Je-li $n > m$, potom prostých funkcí je 0, což odpovídá výrazu.
- Je-li $n \leq m$, nechť $N = \{x_1, \dots, x_n\}$. Potom $f(x_1)$ můžeme zvolit m způsoby, následně $f(x_2)$ můžeme zvolit $(m-1)$ způsoby, atd. až pro $f(x_n)$ máme $m-(n-1)$ způsobů. $\square$

Permutace

Definice

Permutace na konečné množině X je bijekce $\pi\colon X \to X$.

Permutace

Definice

Permutace na konečné množině X je bijekce $\pi\colon X \to X$.

- $\pi\colon X \to X$ je permutace, právě když je prostá.
- $\pi\colon X \to X$ je permutace, právě když je na.

Permutace

Definice

Permutace na konečné množině X je bijekce $\pi\colon X \to X$.

- $\pi\colon X \to X$ je permutace, právě když je prostá.
- $\pi\colon X \to X$ je permutace, právě když je na.
- bijekce $\Rightarrow$ prostá, na (přímo z definice).
- prostá $\Rightarrow$ bijekce mezi X a $\pi(X)$. Nicméně $\pi(X) = X$ protože $\pi(X) \subseteq X$ a $|\pi(X)| = |X|$.

Permutace

Definice

Permutace na konečné množině X je bijekce $\pi\colon X \to X$.

- $\pi\colon X \to X$ je permutace, právě když je prostá.
- $\pi\colon X \to X$ je permutace, právě když je na.
- bijekce $\Rightarrow$ prostá, na (přímo z definice).
- prostá $\Rightarrow$ bijekce mezi X a $\pi(X)$. Nicméně $\pi(X) = X$ protože $\pi(X) \subseteq X$ a $|\pi(X)| = |X|$.
- na $\Rightarrow$ bijekce (rozmyslete si!)

Počet permutací

Definice

Pro n přirozené definujeme n faktoriál jako $n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Dále $0! = 1$.

Počet permutací

Definice

Pro n přirozené definujeme n faktoriál jako $n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Dále $0! = 1$.

Tvrzení (o počtu prostých zobrazení)

Nechť N je n-prvková množina a M je m-prvková. Potom existuje právě $m(m-1)\cdots(m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$ prostých zobrazení z N do M.

Počet permutací

Definice

Pro n přirozené definujeme n faktoriál jako $n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Dále $0! = 1$.

Tvrzení (o počtu prostých zobrazení)

Nechť N je n-prvková množina a M je m-prvková. Potom existuje právě $m(m-1) \cdots (m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$ prostých zobrazení z N do M.

Důsledek (o počtu permutací)

Počet permutací na n-prvkové množině je $n!$.

Zápis a znázorňování permutací

$N = \{x, y,$  $\}$

- Předpisem $\pi(x) = y, \pi(y) =$ $, \pi($$) = x.$

Zápis a znázorňování permutací

$N = \{x, y,$  $\}$

- Předpisem $\pi(x) = y, \pi(y) =$ , $\pi($$) = x$.
- Tabulkou (maticí)

x	y	
y		x

Zápis a znázorňování permutací

$N = \{x, y,$  $\}$

- Předpisem $\pi(x) = y, \pi(y) =$ , $\pi($  $) = x$.
- Tabulkou (maticí) $\begin{pmatrix} x & y & \text{[tram]} \\ y & \text{[tram]} & x \end{pmatrix}$  
- Nejčastěji $N = [n]$, pak stačí napsat spodní řádek.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

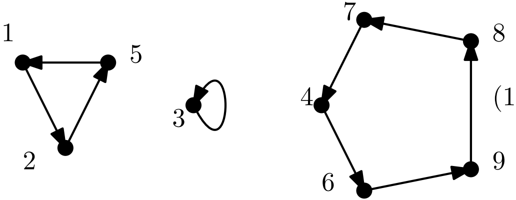
Zápis a znázorňování permutací

$N = \{x, y,$  $\}$

- Předpisem $\pi(x) = y, \pi(y) =$ , $\pi($$) = x$.
- Tabulkou (maticí)

x	y	
y		x

- Nejčastěji $N = [n]$, pak stačí napsat spodní řádek.
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
- Rozklad na cykly: $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 9 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$



$(1, 2, 5)(3)(4, 6, 9, 8, 7)$

Kombinační čísla

Definice

Jsou-li $n \geq k \geq 0$ celá, definujeme kombinační číslo $\binom{n}{k}$ jako

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Kombinační čísla

Definice

Jsou-li $n \geq k \geq 0$ celá, definujeme **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$ jako

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Je-li N a $k \geq 0$ množina, potom symbolem $\binom{N}{k}$ značíme množinu všech k-prvkových podmnožin N.

Kombinační čísla

Definice

Jsou-li $n \geq k \geq 0$ celá, definujeme kombinační číslo $\binom{n}{k}$ jako

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Je-li N a $k \geq 0$ množina, potom symbolem $\binom{N}{k}$ značíme množinu všech k-prvkových podmnožin N.

Tvrzení (o počtu k-prvkových podmnožin)

Je-li N konečná, potom počet jejích k-prvkových podmnožin je $\binom{|N|}{k}$. Neboli $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k}$.

Důkaz tvrzení o počtu k-prvkových podmnožin

Tvrzení (o počtu k-prvkových podmnožin)

Je-li N konečná, potom počet jejích k-prvkových podmnožin je $\binom{|N|}{k}$. Neboli $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k}$.

Důkaz tvrzení o počtu k-prvkových podmnožin

Tvrzení (o počtu k-prvkových podmnožin)

Je-li N konečná, potom počet jejích k-prvkových podmnožin je $\binom{|N|}{k}$. Neboli $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k}$.

Důkaz.

- Spočteme dvěma způsoby počet uspořádaných k-tic různých prvků z N. (Nechť $n := |N|$.)

Důkaz tvrzení o počtu k-prvkových podmnožin

Tvrzení (o počtu k-prvkových podmnožin)

Je-li N konečná, potom počet jejích k-prvkových podmnožin je $\binom{|N|}{k}$. Neboli $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k}$.

Důkaz.

- Spočteme dvěma způsoby počet uspořádaných k-tic různých prvků z N. (Nechť $n := |N|$.)
- 1. způsob: Uspořádaná k-tice $(x_1, \ldots, x_k)$ odpovídá prosté funkci $f : [k] \to N$, kde $f(i) = x_i$.

Důkaz tvrzení o počtu k-prvkových podmnožin

Tvrzení (o počtu k-prvkových podmnožin)

Je-li N konečná, potom počet jejích k-prvkových podmnožin je $\binom{|N|}{k}$. Neboli $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k}$.

Důkaz.

- Spočteme dvěma způsoby počet uspořádaných k-tic různých prvků z N. (Nechť $n := |N|$.)
- 1. způsob: Uspořádaná k-tice $(x_1, \ldots, x_k)$ odpovídá prosté funkci $f : [k] \to N$, kde $f(i) = x_i$.
- Těch je $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (podle tvrzení o počtu prostých funkcí).

Důkaz tvrzení o počtu k-prvkových podmnožin

Tvrzení (o počtu k-prvkových podmnožin)

Je-li N konečná, potom počet jejích k-prvkových podmnožin je $\binom{|N|}{k}$. Neboli $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k}$.

Důkaz.

- Spočteme dvěma způsoby počet uspořádaných k-tic různých prvků z N. (Nechť $n := |N|$.)
- 1. způsob: Uspořádaná k-tice $(x_1, \ldots, x_k)$ odpovídá prosté funkci $f : [k] \to N$, kde $f(i) = x_i$.
- Těch je $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (podle tvrzení o počtu prostých funkcí).
- 2. způsob: Vybereme prvně neuspořádanou k-tici $\left|\binom{N}{k}\right|$ způsoby, a uspořádáme ji $k!$ způsoby.

Důkaz tvrzení o počtu k-prvkových podmnožin

Tvrzení (o počtu k-prvkových podmnožin)

Je-li N konečná, potom počet jejích k-prvkových podmnožin je $\binom{|N|}{k}$. Neboli $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{|N|}{k}$.

Důkaz.

- Spočteme dvěma způsoby počet uspořádaných k-tic různých prvků z N. (Nechť $n := |N|$.)
- 1. způsob: Uspořádaná k-tice $(x_1, \ldots, x_k)$ odpovídá prosté funkci $f : [k] \to N$, kde $f(i) = x_i$.
- Těch je $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (podle tvrzení o počtu prostých funkcí).
- 2. způsob: Vybereme prvně neuspořádanou k-tici $\left|\binom{N}{k}\right|$ způsoby, a uspořádáme ji $k!$ způsoby.
- Dohromady $\frac{n!}{(n-k)!} = \left|\binom{N}{k}\right| k!$ odkud plyne tvrzení. $\square$

Užitečné vztahy pro kombinační čísla

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ přímo z $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Užitečné vztahy pro kombinační čísla

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ přímo z $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Každá k-prvková podmnožina $[n]$ je buď k-prvkovou podmnožinou $[n-1]$ nebo obsahuje n a $(k-1)$-prvkovou podmnožinu $[n-1]$.

Binomická věta

Tvrzení (Binomická věta)

Pro libovolná a, b reálná (dokonce i komplexní) a n celé nezáporné platí

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Binomická věta

Tvrzení (Binomická věta)

Pro libovolná a, b reálná (dokonce i komplexní) a n celé nezáporné platí

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Náznak důkazu.

Symbolicky roznásobíme

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n} = C_i a^{n-i} b^i$$

kde C_i je počet výběrů i-krát b a $(n-i)$-krát a z předchozích závorek. Tedy $C_i = \binom{n}{i}$. $\square$

Aplikace binomické věty

- $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$

Aplikace binomické věty

- $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.
  Souhlasí s tvrzením o počtu podmnožin.

Aplikace binomické věty

- $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.
  Souhlasí s tvrzením o počtu podmnožin.
- $0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} (-1)^i \Leftrightarrow$
  $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}$.

Aplikace binomické věty

- $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.
  Souhlasí s tvrzením o počtu podmnožin.
- $0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} (-1)^i \Leftrightarrow$
  $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}$.
  Jiný důkaz tvrzení o počtu sudých a lichých podmnožin.