Indukce - opakování

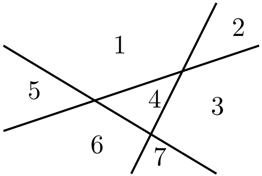
Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.



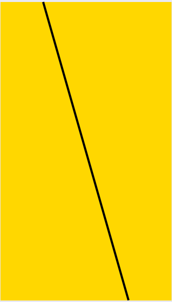
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.



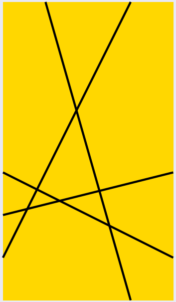
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.
- 2. indukční krok: Předpokládáme platnost pro $n = k$ a menší. Dokazujeme pro $n = k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.



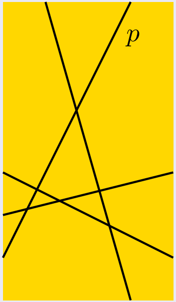
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.
- 2. indukční krok: Předpokládáme platnost pro $n = k$ a menší. Dokazujeme pro $n = k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.
- Uvažujme libovolnou přímku p a odebereme ji. Po odebrání máme k přímek a tedy $\frac{k^2+k+2}{2}$ částí podle indukčního předpokladu.



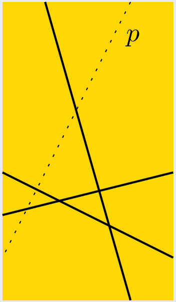
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.
- 2. indukční krok: Předpokládáme platnost pro $n = k$ a menší. Dokazujeme pro $n = k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.
- Uvažujme libovolnou přímku p a odebereme ji. Po odebrání máme k přímek a tedy $\frac{k^2+k+2}{2}$ částí podle indukčního předpokladu.



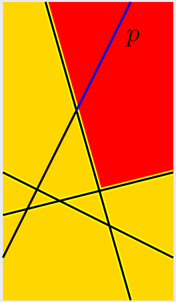
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.
- 2. indukční krok: Předpokládáme platnost pro $n = k$ a menší. Dokazujeme pro $n = k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.
- Uvažujme libovolnou přímku p a odebereme ji. Po odebrání máme k přímek a tedy $\frac{k^2+k+2}{2}$ částí podle indukčního předpokladu.
- Vrácením p zpět vytvoříme $k + 1$ nových částí.



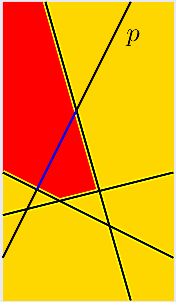
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.
- 2. indukční krok: Předpokládáme platnost pro $n = k$ a menší. Dokazujeme pro $n = k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.
- Uvažujme libovolnou přímku p a odebereme ji. Po odebrání máme k přímek a tedy $\frac{k^2+k+2}{2}$ částí podle indukčního předpokladu.
- Vrácením p zpět vytvoříme $k + 1$ nových částí.



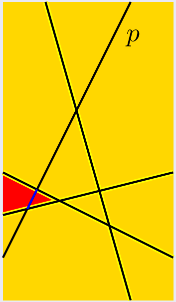
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.
- 2. indukční krok: Předpokládáme platnost pro $n = k$ a menší. Dokazujeme pro $n = k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.
- Uvažujme libovolnou přímku p a odebereme ji. Po odebrání máme k přímek a tedy $\frac{k^2+k+2}{2}$ částí podle indukčního předpokladu.
- Vrácením p zpět vytvoříme $k+1$ nových částí.



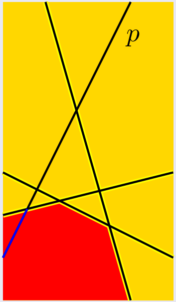
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.
- 2. indukční krok: Předpokládáme platnost pro $n = k$ a menší. Dokazujeme pro $n = k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.
- Uvažujme libovolnou přímku p a odebereme ji. Po odebrání máme k přímek a tedy $\frac{k^2+k+2}{2}$ částí podle indukčního předpokladu.
- Vrácením p zpět vytvoříme $k + 1$ nových částí.



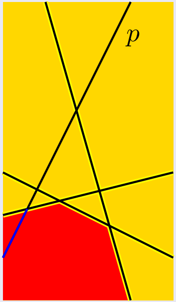
Indukce - opakování

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Matematickou indukcí.

- 1. indukční krok, $n = 1$, OK.
- 2. indukční krok: Předpokládáme platnost pro $n = k$ a menší. Dokazujeme pro $n = k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.
- Uvažujme libovolnou přímku p a odebereme ji. Po odebrání máme k přímek a tedy $\frac{k^2+k+2}{2}$ částí podle indukčního předpokladu.
- Vrácením p zpět vytvoříme $k + 1$ nových částí.
- Dohromady $\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$. $\square$



Co není indukce!

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Co není indukce!

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

- Ověříme pro $n = 1$.

Co není indukce!

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

- Ověříme pro $n = 1$.
- Předpokládáme, že vzoreček platí pro k, přidáme přímku, a ověříme pro $k = 1$.

Co není indukce!

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

- Ověříme pro $n = 1$.
- Předpokládáme, že vzoreček platí pro k, ~~přidáme přímku~~, a ověříme pro $k = 1$.

Co není indukce!

Příklad

Ukažte, že n přímek takových, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

- Ověříme pro $n = 1$.
- Předpokládáme, že vzoreček platí pro k, ~~přidáme přímku~~, a ověříme pro $k = 1$.
- V tomto důkazu rozdíl ještě nehraje velkou roli, ale až budeme dělat indukci na grafech, tak bude obrovský rozdíl mezi přidáním a odebráním hrany.

Funkce

- Připomenutí: Relace mezi X a Y je podmnožina $X \times Y$.

Funkce

- Připomenutí: Relace mezi X a Y je podmnožina $X \times Y$.

Definice

Funkce z množiny X do množiny Y je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ splňující xfy (tj. $(x, y) \in f$).

Funkce

- Připomenutí: Relace mezi X a Y je podmnožina $X \times Y$.

Definice

Funkce z množiny X do množiny Y je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ splňující xfy (tj. $(x, y) \in f$). Množina X se nazývá definiční obor funkce f a množina Y se nazývá obor hodnot funkce f.

Funkce

- Připomenutí: Relace mezi X a Y je podmnožina $X \times Y$.

Definice

Funkce z množiny X do množiny Y je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ splňující xfy (tj. $(x, y) \in f$). Množina X se nazývá definiční obor funkce f a množina Y se nazývá obor hodnot funkce f.

Poznámky

- Obvyklé značení funkce f z X do Y je $f : X \to Y$. Je-li dáno $x \in X$, potom jednoznačné y splňující xfy se značí $f(x)$.

Funkce

- Připomenutí: Relace mezi X a Y je podmnožina $X \times Y$.

Definice

Funkce z množiny X do množiny Y je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ splňující xfy (tj. $(x, y) \in f$). Množina X se nazývá definiční obor funkce f a množina Y se nazývá obor hodnot funkce f.

Poznámky

- Obvyklé značení funkce f z X do Y je $f : X \to Y$. Je-li dáno $x \in X$, potom jednoznačné y splňující xfy se značí $f(x)$.
- Z definice je funkce definována na celém definičním oboru. Pokud třeba chete zadat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, tak pro nás je to funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$.

Funkce

- Připomenutí: Relace mezi X a Y je podmnožina $X \times Y$.

Definice

Funkce z množiny X do množiny Y je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ splňující xfy (tj. $(x, y) \in f$). Množina X se nazývá definiční obor funkce f a množina Y se nazývá obor hodnot funkce f.

Poznámky

- Obvyklé značení funkce f z X do Y je $f : X \to Y$. Je-li dáno $x \in X$, potom jednoznačné y splňující xfy se značí $f(x)$.
- Z definice je funkce definována na celém definičním oboru. Pokud třeba chete zadat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, tak pro nás je to funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$.
- Formálně vzato dvě funkce s různým oborem hodnot jsou dvě různé funkce, například $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ daná $f(x) = x + 1$ a $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ daná $g(x) = x + 1$.

Funkce, pokračování

Definice

Mějme funkci $f\colon X \to Y$.

- Je-li $A \subseteq X$, potom obraz množiny A je definován jako $f(A) := \{f(a)\colon a \in A\}$.

Funkce, pokračování

Definice

Mějme funkci $f\colon X \to Y$.

- Je-li $A \subseteq X$, potom obraz množiny A je definován jako $f(A) := \{f(a)\colon a \in A\}$.
- Je-li $B \subseteq Y$, potom vzor množiny B je definován jako $f^{-1}(B) := \{x \in X\colon f(x) \in B\}$.

Funkce, pokračování

Definice

Mějme funkci $f\colon X \to Y$.

- Je-li $A \subseteq X$, potom obraz množiny A je definován jako $f(A) := \{f(a)\colon a \in A\}$.
- Je-li $B \subseteq Y$, potom vzor množiny B je definován jako $f^{-1}(B) := \{x \in X\colon f(x) \in B\}$.
- Funkce f je prostá (též injektivní) pokud $f(x) \neq f(y)$ kdykoliv $x \neq y$.

Funkce, pokračování

Definice

Mějme funkci $f\colon X \to Y$.

- Je-li $A \subseteq X$, potom obraz množiny A je definován jako $f(A) := \{f(a)\colon a \in A\}$.
- Je-li $B \subseteq Y$, potom vzor množiny B je definován jako $f^{-1}(B) := \{x \in X\colon f(x) \in B\}$.
- Funkce f je prostá (též injektivní) pokud $f(x) \neq f(y)$ kdykoliv $x \neq y$.
- Funkce f je na (též surjektivní), pokud $f(X) = Y$, tj. pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$, že $y = f(x)$.

Funkce, pokračování

Definice

Mějme funkci $f\colon X \to Y$.

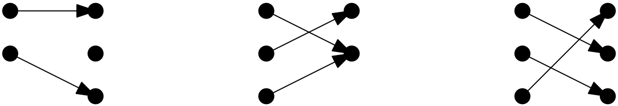
- Je-li $A \subseteq X$, potom obraz množiny A je definován jako $f(A) := \{f(a)\colon a \in A\}$.
- Je-li $B \subseteq Y$, potom vzor množiny B je definován jako $f^{-1}(B) := \{x \in X\colon f(x) \in B\}$.
- Funkce f je prostá (též injektivní) pokud $f(x) \neq f(y)$ kdykoliv $x \neq y$.
- Funkce f je na (též surjektivní), pokud $f(X) = Y$, tj. pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$, že $y = f(x)$.
- Funkce f je bijekce, pokud je prostá a na.

Funkce, pokračování

Definice

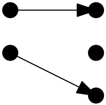
Mějme funkci $f\colon X \to Y$.

- Je-li $A \subseteq X$, potom obraz množiny A je definován jako $f(A) := \{f(a) \colon a \in A\}$.
- Je-li $B \subseteq Y$, potom vzor množiny B je definován jako $f^{-1}(B) := \{x \in X \colon f(x) \in B\}$.
- Funkce f je prostá (též injektivní) pokud $f(x) \neq f(y)$ kdykoliv $x \neq y$.
- Funkce f je na (též surjektivní), pokud $f(X) = Y$, tj. pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$, že $y = f(x)$.
- Funkce f je bijekce, pokud je prostá a na.

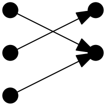


prostá na bijekce

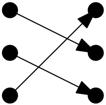
Vlastnosti funkcí a velikost množin



prostá

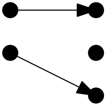


na

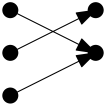


bijekce

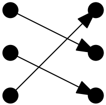
Vlastnosti funkcí a velikost množin



prostá



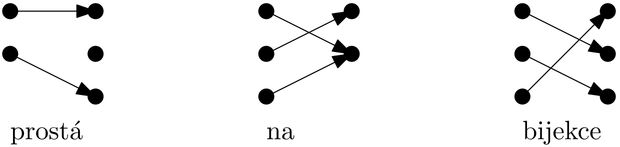
na



bijekce

- Pro konečné množiny:
  - $|X| \leq |Y|$, právě když existuje $f\colon X \to Y$ prostá.
  - $|X| \geq |Y|$, právě když existuje $f\colon X \to Y$ na.
  - $|X| = |Y|$, právě když existuje bijekce $f\colon X \to Y$.

Vlastnosti funkcí a velikost množin



- Pro konečné množiny:
  - $|X| \leq |Y|$, právě když existuje $f\colon X \to Y$ prostá.
  - $|X| \geq |Y|$, právě když existuje $f\colon X \to Y$ na.
  - $|X| = |Y|$, právě když existuje bijekce $f\colon X \to Y$.
- Dá se zobecnit na nekonečné množiny, např. dvě množiny X a Y považujeme za stejně velké, pokud existuje bijekce $f\colon X \to Y$.

Inverzní funkce a relace

Definice

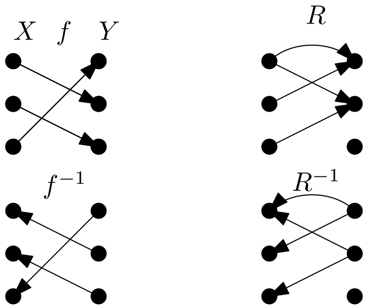
Je-li $f\colon X \to Y$ bijekce, potom její inverzní funkce je funkce $f^{-1}\colon Y \to X$ definovaná tak, že $f^{-1}(y)$ je jednoznačné $x \in X$ takové, že $f(x) = y$.

Inverzní funkce a relace

Definice

Je-li $f\colon X \to Y$ bijekce, potom její inverzní funkce je funkce $f^{-1}\colon Y \to X$ definovaná tak, že $f^{-1}(y)$ je jednoznačné $x \in X$ takové, že $f(x) = y$.
Obecněji, je-li $R \subseteq X \times Y$ relace, potom její inverze je relace $R^{-1} \subseteq Y \times X$ definovaná jako

$$R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X\colon (x, y) \in R\}.$$



Skládání funkcí a relací

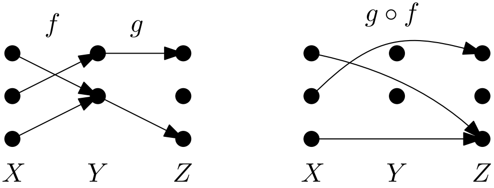
Definice

Mějme funkce $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$. Jejich složení je funkce $g \circ f\colon X \to Z$ definovaná $g \circ f(x) := g(f(x))$ pro každé $x \in X$.

Skládání funkcí a relací

Definice

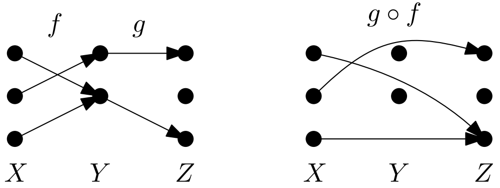
Mějme funkce $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$. Jejich složení je funkce $g \circ f\colon X \to Z$ definovaná $g \circ f(x) := g(f(x))$ pro každé $x \in X$.



Skládání funkcí a relací

Definice

Mějme funkce $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$. Jejich složení je funkce $g \circ f\colon X \to Z$ definovaná $g \circ f(x) := g(f(x))$ pro každé $x \in X$.

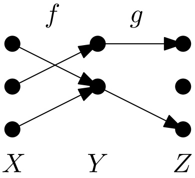


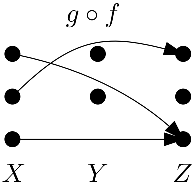
Definice

Mějme relace $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times Z$. Jejich složení je relace $R \circ S \subseteq X \times Z$ definovaná jako (obrácené značení!)

$$R \circ S := \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y \text{ takové, že } (x, y) \in R, (y, z) \in S\}.$$

Skládání funkcí a relací

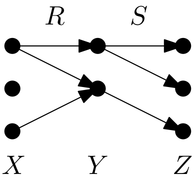


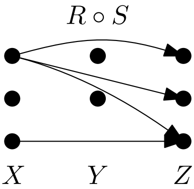


Definice

Mějme relace $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times Z$. Jejich složení je relace $R \circ S \subseteq X \times Z$ definovaná jako (obrácené značení!)

$$R \circ S := \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y \text{ takové, že } (x, y) \in R, (y, z) \in S\}.$$





Částečná uspořádání, motivace

- Chceme provnávat prvky nějakých množin podle velikosti nebo podle jiného kritéria.

Částečná uspořádání, motivace

- Chceme provnávat prvky nějakých množin podle velikosti nebo podle jiného kritéria.
- Na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ máme přirozené uspořádání $\leq$.

Částečná uspořádání, motivace

- Chceme provnávat prvky nějakých množin podle velikosti nebo podle jiného kritéria.
- Na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ máme přirozené uspořádání $\leq$.
- Na $\mathbb{N}$ máme také upořádání podle dělitelnisti, zavedeme $a \preceq b$, pokud $a|b$. (Například $2|6$ ale $2 \not| 5$.)

Částečná uspořádání, motivace

- Chceme provnávat prvky nějakých množin podle velikosti nebo podle jiného kritéria.
- Na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ máme přirozené uspořádání $\leq$.
- Na $\mathbb{N}$ máme také upořádání podle dělitelnisti, zavedeme $a \preceq b$, pokud $a|b$. (Například $2|6$ ale $2 \not| 5$.)
- Na $\mathbb{R}^2$ můžeme porovnávat dvojice, zavedeme $(a, b) \preceq (c, d)$ pokud $a \leq c$ a $b \leq d$.
- Zastřešující pojem: částečné uspořádání.

Částečná uspořádání, motivace

- Chceme provnávat prvky nějakých množin podle velikosti nebo podle jiného kritéria.
- Na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ máme přirozené uspořádání $\leq$.
- Na $\mathbb{N}$ máme také upořádání podle dělitelnisti, zavedeme $a \preceq b$, pokud $a|b$. (Například $2|6$ ale $2 \not| 5$.)
- Na $\mathbb{R}^2$ můžeme porovnávat dvojice, zavedeme $(a, b) \preceq (c, d)$ pokud $a \leq c$ a $b \leq d$.
- Zastřešující pojem: částečné uspořádání.

Společné vlastnosti:

Částečná uspořádání, motivace

- Chceme provnávat prvky nějakých množin podle velikosti nebo podle jiného kritéria.
- Na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ máme přirozené uspořádání $\leq$.
- Na $\mathbb{N}$ máme také upořádání podle dělitelnisti, zavedeme $a \preceq b$, pokud $a|b$. (Například $2|6$ ale $2 \not| 5$.)
- Na $\mathbb{R}^2$ můžeme porovnávat dvojice, zavedeme $(a, b) \preceq (c, d)$ pokud $a \leq c$ a $b \leq d$.
- Zastřešující pojem: částečné uspořádání.

Společné vlastnosti:

- Reflexivita: $a \leq a$, $a|a$, $(a, b) \preceq (a, b)$.

Částečná uspořádání, motivace

- Chceme provnávat prvky nějakých množin podle velikosti nebo podle jiného kritéria.
- Na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ máme přirozené uspořádání $\leq$.
- Na $\mathbb{N}$ máme také upořádání podle dělitelnisti, zavedeme $a \preceq b$, pokud $a|b$. (Například $2|6$ ale $2 \not| 5$.)
- Na $\mathbb{R}^2$ můžeme porovnávat dvojice, zavedeme $(a, b) \preceq (c, d)$ pokud $a \leq c$ a $b \leq d$.
- Zastřešující pojem: částečné uspořádání.

Společné vlastnosti:

- Reflexivita: $a \leq a$, $a|a$, $(a, b) \preceq (a, b)$.
- (Slabá) antisymetrie: $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$; $a|b, b|a \Rightarrow a = b$; $(a, b) \preceq (c, d), (c, d) \preceq (a, b) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.

Částečná uspořádání, motivace

- Chceme provnávat prvky nějakých množin podle velikosti nebo podle jiného kritéria.
- Na $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ máme přirozené uspořádání $\leq$.
- Na $\mathbb{N}$ máme také upořádání podle dělitelnisti, zavedeme $a \preceq b$, pokud $a|b$. (Například $2|6$ ale $2 \not| 5$.)
- Na $\mathbb{R}^2$ můžeme porovnávat dvojice, zavedeme $(a, b) \preceq (c, d)$ pokud $a \leq c$ a $b \leq d$.
- Zastřešující pojem: částečné uspořádání.

Společné vlastnosti:

- Reflexivita: $a \leq a$, $a|a$, $(a, b) \preceq (a, b)$.
- (Slabá) antisymetrie: $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$; $a|b, b|a \Rightarrow a = b$; $(a, b) \preceq (c, d), (c, d) \preceq (a, b) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.
- Tranzitivita: $a \leq b, b \leq c \rightarrow a \leq c$; $a|b, b|c \Rightarrow a|c$; $(a, b) \preceq (c, d), (c, d) \preceq (e, f) \Rightarrow (a, b) \preceq (e, f)$.

Vlastnosti relací (většinou připomenutí)

Připomenutí

Řekneme, že relace R na X je

(a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;

(b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;

(c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

Vlastnosti relací (většinou připomenutí)

Připomenutí

Řekneme, že relace R na X je

(a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;

(b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;

(c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

Definice

Relace R na množině X je (slabě) antisymetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí nastane-li xRy a yRx, potom $x = y$.

Vlastnosti relací (většinou připomenutí)

Připomenutí

Řekneme, že relace R na X je

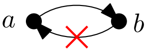
(a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;

(b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;

(c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

Definice

Relace R na množině X je (slabě) antisymetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí nastane-li xRy a yRx, potom $x = y$.



$a \neq b$

Vlastnosti relací (většinou připomenutí)

Připomenutí

Řekneme, že relace R na X je

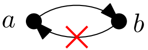
(a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;

(b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;

(c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

Definice

Relace R na množině X je (slabě) antisymetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí nastane-li xRy a yRx, potom $x = y$.



$a \neq b$

- Pozn.: Relace R na X je silně antisymetrická, pokud $xRy \Rightarrow y \not R x$, pro každé $x, y \in X$. (Tedy navíc nepovoluje xRx.)

Částešně uspořádaná množina

Definice

Relace R na množině X se nazývá částečné uspořádání, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Je-li R částečné uspořádání na X, potom dvojice (X, R) se nazývá částečně uspořádaná množina (zkracováno na ČUM).

Částešně uspořádaná množina

Definice

Relace R na množině X se nazývá částečné uspořádání, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Je-li R částečné uspořádání na X, potom dvojice (X, R) se nazývá částečně uspořádaná množina (zkracováno na ČUM).

- Typické značení $\leq, \preceq$.
- Je-li $(X, \preceq)$ ČUM, potom můžeme odvodit ostré částečné uspořádání $\prec$ tak, že $a \prec b$, pokud $a \preceq b$ a $a \neq b$. (Ostré částečné uspořádání je silně antisymetrické a tranzitivní.)
- Také můžeme odvodit obrácené uspořádání: $a \preceq' b$, pokud $b \preceq a$.

Částečná uspořádání—následník a Hasseův diagram

Definice

Je-li $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $\prec$ odpovídající ostré uspořádání. Pro dva prvky $a, b \in X$ řekneme, že b je bezprostřední následník a, pokud $a \prec b$, ale zároveň neexistuje c, že $a \prec c \prec b$.

Částečná upořádání—následník a Hasseův diagram

Definice

Je-li $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $\prec$ odpovídající ostré uspořádání. Pro dva prvky $a, b \in X$ řekneme, že b je bezprostřední následník a, pokud $a \prec b$, ale zároveň neexistuje c, že $a \prec c \prec b$.

Neformální Definice

Hasseův diagram konečné částečně uspořádané množiny $(X, \preceq)$ je zobrazení prvků X takové, že pokud $a \prec b$, tak a zobrazujeme níže než b, a navíc mezi prvky a a b takovými, že b je bezprostřední následník a vedeme hranu (úsečku).

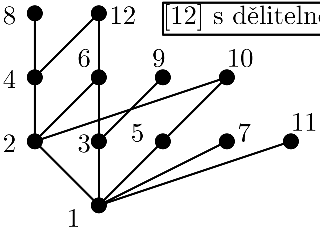
Částečná uspořádání—následník a Hasseův diagram

Definice

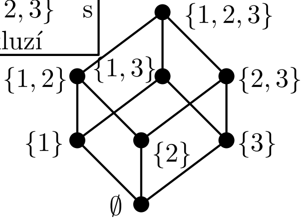
Je-li $(X, \preceq)$ částečně uspořádaná množina a $\prec$ odpovídající ostré uspořádání. Pro dva prvky $a, b \in X$ řekneme, že b je bezprostřední následník a, pokud $a \prec b$, ale zároveň neexistuje c, že $a \prec c \prec b$.

Neformální Definice

Hasseův diagram konečné částečně uspořádané množiny $(X, \preceq)$ je zobrazení prvků X takové, že pokud $a \prec b$, tak a zobrazujeme níže než b, a navíc mezi prvky a a b takovými, že b je bezprostřední následník a vedeme hranu (úsečku).



$[12]$ s dělitelností



$\{1, 2, 3\}$ s inkluzí

Částečná uspořádání—řetězce a antiřetězce

Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$.

Částečná uspořádání—řetězce a antiřetězce

Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné.

Částečná uspořádání—řetězce a antiřetězce

Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné. Antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ taková, že žádné dva její různe prvky nejsou porovnatelné.

Částečná uspořádání—řetězce a antiřetězce

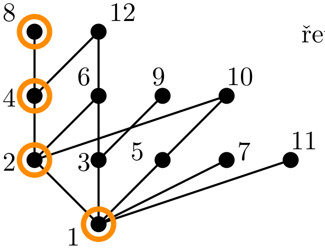
Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné. Antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ taková, že žádné dva její různe prvky nejsou porovnatelné. Uspořádání je lineární (též úplné), pokud X je řetězec.

Částečná uspořádání—řetězce a antiřetězce

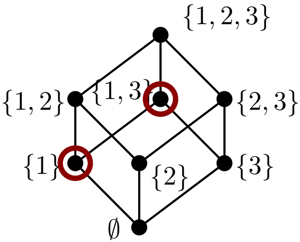
Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné. Antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ taková, že žádné dva její různe prvky nejsou porovnatelné. Uspořádání je lineární (též úplné), pokud X je řetězec.



$([12], |)$

řetězce

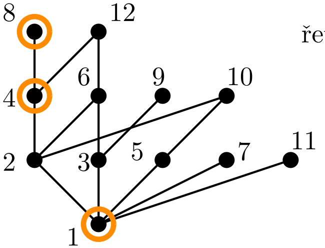


$(2^{[3]}, \subseteq)$

Částečná uspořádání—řetězce a antiřetězce

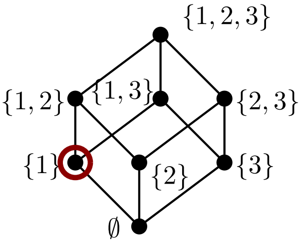
Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné. Antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ taková, že žádné dva její různe prvky nejsou porovnatelné. Uspořádání je lineární (též úplné), pokud X je řetězec.



$([12], |)$

řetězce

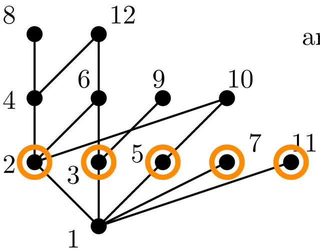


$(2^{[3]}, \subseteq)$

Částečná uspořádání—řetězce a antiřetězce

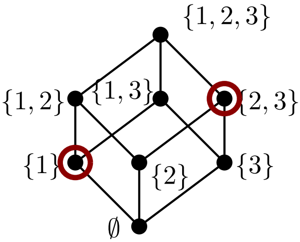
Definice

Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Dva prvky $a, b \in X$ jsou porovnatelné, pokud $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Řetězec je podmnožina $C \subseteq X$ taková, že každé dva její prvky jsou porovnatelné. Antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ taková, že žádné dva její různé prvky nejsou porovnatelné. Uspořádání je lineární (též úplné), pokud X je řetězec.



$([12], |)$

antiřetězce



$(2^{[3]}, \subseteq)$