Náhodné veličiny

Definice

Náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) je libovolná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Náhodné veličiny

Definice

Náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) je libovolná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Příklady

- $\Omega = \{0, 1\}^n$, náhodné veličiny:
  - počet jedniček
  - počet po sobě jdoucích trojic jedniček
  - sin(počtu nul)

Náhodné veličiny

Definice

Náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) je libovolná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Příklady

- $\Omega = \{0, 1\}^n$, náhodné veličiny:
  - počet jedniček
  - počet po sobě jdoucích trojic jedniček
  - sin(počtu nul)
- $\Omega = \{$všichni Pražané$\}$
  - výška
  - příjem
  - vzdálenost místa bydliště od Starom. náměstí

Střední hodnota

Definice

Nechť $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P). Střední hodnota X je definovaná jako

$$E[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}] X(\omega).$$

Střední hodnota

Definice

Nechť $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P). Střední hodnota X je definovaná jako

$$E[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}] X(\omega).$$

Pozn.: Pokud je Ω nekonečná, vyžadujeme aby řadu šlo sečíst.

Střední hodnota

Definice

Nechť $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P). Střední hodnota X je definovaná jako

$$E[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}]X(\omega).$$

Pozn.: Pokud je Ω nekonečná, vyžadujeme aby řadu šlo sečíst.

Příklad

Třikrát hodíme spravedlivou mincí, chceme určit střední hodnotu počtu jedniček:

Střední hodnota

Definice

Nechť $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P). Střední hodnota X je definovaná jako

$$E[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}] X(\omega).$$

Pozn.: Pokud je Ω nekonečná, vyžadujeme aby řadu šlo sečíst.

Příklad

Třikrát hodíme spravedlivou mincí, chceme určit střední hodnotu počtu jedniček:

- $\Omega = \{0, 1\}^3$. $P[\omega] = \frac{1}{8}$ pro každé $\omega \in \Omega$.

Střední hodnota

Definice

Nechť $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P). Střední hodnota X je definovaná jako

$$E[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}]X(\omega).$$

Pozn.: Pokud je Ω nekonečná, vyžadujeme aby řadu šlo sečíst.

Příklad

Třikrát hodíme spravedlivou mincí, chceme určit střední hodnotu počtu jedniček:

- $\Omega = \{0,1\}^3$. $P[\omega] = \frac{1}{8}$ pro každé $\omega \in \Omega$.
- Nechť X je náhodná veličina "počet jedniček".
- $X(000) = 0, X(001) = 1, X(010) = 1, X(011) = 2,$ $X(100) = 1, X(101) = 2, X(110) = 2, X(111) = 3$
- $E[X] = \frac{1}{8}(0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3) = 1,5.$

Jiný výpočet střední hodnoty

Pozorování

Je-li X náhodná veličina na diskr. pravd. prostoru (Ω, P), potom střední hodnotu X můžeme též spočítat jako

$$E[X] = \sum_{a \in X(\Omega)} aP[X = a],$$

kde $X(\Omega)$ je obraz Ω v X a $P[X = a]$ je zkratka za $P[\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = a\}]$.

Jiný výpočet střední hodnoty

Pozorování

Je-li X náhodná veličina na diskr. pravd. prostoru (Ω, P), potom střední hodnotu X můžeme též spočítat jako

$$E[X] = \sum_{a \in X(\Omega)} aP[X = a],$$

kde $X(\Omega)$ je obraz Ω v X a $P[X = a]$ je zkratka za $P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}]$.

Důkaz.

$$E[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}]X(\omega) = \sum_{a \in X(\Omega)} \underbrace{\left(\sum_{\omega :\ X(\omega)=a} P[\{\omega\}] \right)}_{P[X=a]} a$$

$\square$

Srovnání s minulým příkladem

V minulém příkladu jsme měli výraz pro střední hodnotu počtu jedniček:

- $E[X] = \frac{1}{8}(0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3) = 1,5.$

Srovnání s minulým příkladem

V minulém příkladu jsme měli výraz pro střední hodnotu počtu jedniček:

- $E[X] = \frac{1}{8}(0+1+1+2+1+2+2+3) = 1,5.$
- Po přeuspořádání:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{1}{8}(1+1+1) + \frac{1}{8}(2+2+2) + \frac{1}{8}\cdot 3 \\ &= \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3. \end{aligned}$$

Medián

- Medián náhodné veličiny je m takové, že $P[x < m] \leq \frac{1}{2}$ a $P[x > m] \leq \frac{1}{2}$.

Medián

- Medián náhodné veličiny je m takové, že $P[x < m] \leq \frac{1}{2}$ a $P[x > m] \leq \frac{1}{2}$.
- Trochu jiný pojem než střední hodnota:

Medián

- Medián náhodné veličiny je m takové, že $P[x < m] \leq \frac{1}{2}$ a $P[x > m] \leq \frac{1}{2}$.
- Trochu jiný pojem než střední hodnota:

Příklad

- Průměrná mzda v 2. čtvrtletí 2020 byla 34271 Kč (odpovídá střední hodnotě).

Medián

- Medián náhodné veličiny je m takové, že $P[x < m] \leq \frac{1}{2}$ a $P[x > m] \leq \frac{1}{2}$.
- Trochu jiný pojem než střední hodnota:

Příklad

- Průměrná mzda v 2. čtvrtletí 2020 byla 34271 Kč (odpovídá střední hodnotě).
- Medián mezd byl 29123 Kč (50% zaměstnaných dosáhne alespoň na tuto částku).

Medián

- Medián náhodné veličiny je m takové, že $P[x < m] \leq \frac{1}{2}$ a $P[x > m] \leq \frac{1}{2}$.
- Trochu jiný pojem než střední hodnota:

Příklad

- Průměrná mzda v 2. čtvrtletí 2020 byla 34271 Kč (odpovídá střední hodnotě).
- Medián mezd byl 29123 Kč (50% zaměstnaných dosáhne alespoň na tuto částku).
- Většina lidí má podprůměrnou mzdu, průměr táhnou nahoru ti, kteří mají velmi vysokou mzdu.

Linearita střední hodnoty

Tvrzení (Linearity střední hodnoty)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny na stejném diskr. pravd. prostoru (Ω, P). Potom

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y].$$

Linearita střední hodnoty

Tvrzení (Linearity střední hodnoty)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* X, Y *jsou náhodné veličiny na stejném diskr. pravd. prostoru* (Ω, P)*. Potom*

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y].$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} E[\alpha X + \beta Y] &= \sum_{\omega \in \Omega} (\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)) P[\{\omega\}] = \\ &= \alpha \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P[\{\omega\}] + \beta \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P[\{\omega\}] = \\ &= \alpha E[X] + \beta E[Y] \end{aligned}$$

□

Indikátory

Definice

Nechť (Ω, P) je diskr. pravd. prostor. Indikátor jevu $A \subseteq \Omega$ je náhodná veličina $I_A \colon \Omega \to \{0, 1\}$ definovaná jako

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ pokud } \omega \in A, \\ 0 \text{ pokud } \omega \notin A. \end{cases}$$

Indikátory

Definice

Nechť (Ω, P) je diskr. pravd. prostor. Indikátor jevu $A \subseteq \Omega$ je náhodná veličina $I_A \colon \Omega \to \{0, 1\}$ definovaná jako

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ pokud } \omega \in A, \\ 0 \text{ pokud } \omega \notin A. \end{cases}$$

- Přímo z definice střední hodnoty plyne $E[I_A] = P[A]$.

Využití indikátorů I

Příklad (Zobecnění předchozího)

Spočtěte střední hodnotu počtu jedniček v náhodné posloupnosti n nul a jedniček.

Využití indikátorů I

Příklad (Zobecnění předchozího)

Spočtěte střední hodnotu počtu jedniček v náhodné posloupnosti n nul a jedniček.

Řešení.

- X: náhodná veličina, počet jedniček.

Využití indikátorů I

Příklad (Zobecnění předchozího)

Spočtěte střední hodnotu počtu jedniček v náhodné posloupnosti n nul a jedniček.

Řešení.

- X: náhodná veličina, počet jedniček.
- A_i: jev, i. člen je jednička.

Využití indikátorů I

Příklad (Zobecnění předchozího)

Spočtěte střední hodnotu počtu jedniček v náhodné posloupnosti n nul a jedniček.

Řešení.

- X: náhodná veličina, počet jedniček.
- A_i: jev, i. člen je jednička.
- Pak $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_n}$.

Využití indikátorů I

Příklad (Zobecnění předchozího)

Spočtěte střední hodnotu počtu jedniček v náhodné posloupnosti n nul a jedniček.

Řešení.

- X: náhodná veličina, počet jedniček.
- A_i: jev, i. člen je jednička.
- Pak $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_n}$.
- Tedy $E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[I_{A_i}] = \frac{n}{2}$. □

Využití indikátorů II

Příklad

Spočtěte střední hodnotu počtu pevných bodů v náhodné permutaci na n prvcích.

Využití indikátorů II

Příklad

Spočtěte střední hodnotu počtu pevných bodů v náhodné permutaci na n prvcích.

Řešení.

- X: náhodná veličina, počet pevných bodů.

Využití indikátorů II

Příklad

Spočtěte střední hodnotu počtu pevných bodů v náhodné permutaci na n prvcích.

Řešení.

- X: náhodná veličina, počet pevných bodů.
- A_i: jev, i je pevný bod, $P[A_i] = \frac{1}{n}$.

Využití indikátorů II

Příklad

Spočtěte střední hodnotu počtu pevných bodů v náhodné permutaci na n prvcích.

Řešení.

- X: náhodná veličina, počet pevných bodů.
- A_i: jev, i je pevný bod, $P[A_i] = \frac{1}{n}$.
- Pak $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_n}$.

Využití indikátorů II

Příklad

Spočtěte střední hodnotu počtu pevných bodů v náhodné permutaci na n prvcích.

Řešení.

- X: náhodná veličina, počet pevných bodů.
- A_i: jev, i je pevný bod, $P[A_i] = \frac{1}{n}$.
- Pak $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_n}$.
- Tedy $E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[I_{A_i}] = \frac{n}{n} = 1$. □

Nezávislé náhodné veličiny

Definice

Náhodné veličiny X, Y na diskr. pravd. prostoru (Ω, P) jsou nezávislé, pokud $\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí, že jevy "$X \leq a$" a "$Y \leq b$" jsou nezávislé.

Nezávislé náhodné veličiny

Definice

Náhodné veličiny X, Y na diskr. pravd. prostoru (Ω, P) jsou nezávislé, pokud $\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí, že jevy "$X \leq a$" a "$Y \leq b$" jsou nezávislé.

- Obecně neplatí $E[XY] = E[X]E[Y]$, nicméně, jsou-li X a Y nezávislé, tak tato rovnost platí.

Pravděpodobnostní rozdělení

- Intuitivně: Rozdělení náhodné veličiny X popisuje s jakou pravděpodobností nabývá X jakých hodnot.

Pravděpodobnostní rozdělení

- Intuitivně: Rozdělení náhodné veličiny X popisuje s jakou pravděpodobností nabývá X jakých hodnot.
- V konečném pravděpodobnostním prostoru ho můžeme popsat jako výčet dvojic $(a_1, p_1), \ldots, (a_n, p_n)$, kde a_i jsou prvky obrazu X a p_i je pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty a_i.

Pravděpodobnostní rozdělení

- Intuitivně: Rozdělení náhodné veličiny X popisuje s jakou pravděpodobností nabývá X jakých hodnot.
- V konečném pravděpodobnostním prostoru ho můžeme popsat jako výčet dvojic $(a_1, p_1), \ldots, (a_n, p_n)$, kde a_i jsou prvky obrazu X a p_i je pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty a_i.
- Dřívější vzoreček $E[X] = \sum_{a \in X(\Omega)} aP[X = a]$ znamená, že střední hodnotu můžeme spočítat pouze ze znalosti rozdělení.

Pravděpodobnostní rozdělení

- Intuitivně: Rozdělení náhodné veličiny X popisuje s jakou pravděpodobností nabývá X jakých hodnot.
- V konečném pravděpodobnostním prostoru ho můžeme popsat jako výčet dvojic $(a_1, p_1), \ldots, (a_n, p_n)$, kde a_i jsou prvky obrazu X a p_i je pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty a_i.
- Dřívější vzoreček $E[X] = \sum_{a \in X(\Omega)} aP[X = a]$ znamená, že střední hodnotu můžeme spočítat pouze ze znalosti rozdělení.
- Obecně se nejčastěji rozdělení zadává pomocí distribuční funkce:

Pravděpodobnostní rozdělení

- Intuitivně: Rozdělení náhodné veličiny X popisuje s jakou pravděpodobností nabývá X jakých hodnot.
- V konečném pravděpodobnostním prostoru ho můžeme popsat jako výčet dvojic $(a_1, p_1), \ldots, (a_n, p_n)$, kde a_i jsou prvky obrazu X a p_i je pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty a_i.
- Dřívější vzoreček $E[X] = \sum_{a \in X(\Omega)} aP[X = a]$ znamená, že střední hodnotu můžeme spočítat pouze ze znalosti rozdělení.
- Obecně se nejčastěji rozdělení zadává pomocí distribuční funkce:

Definice

Nechť X je náhodná veličina na diskr. pravd. prostoru (Ω, P). Potom její distribuční funkce je funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako $F(x) := P[X \leq x]$.

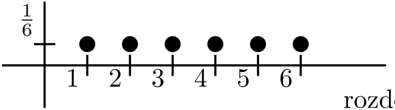
Rovnoměrné (též uniformní) rozdělení

- X má rovnoměrné rozdělení, pokud nabývá n různých hodnot, každé s pravděpodobností $\frac{1}{n}$. Navíc požadujeme, aby tyto hodnoty tvořily aritmetickou posloupnost.

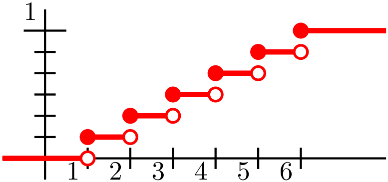
Rovnoměrné (též uniformní) rozdělení

- X má rovnoměrné rozdělení, pokud nabývá n různých hodnot, každé s pravděpodobností $\frac{1}{n}$. Navíc požadujeme, aby tyto hodnoty tvořily aritmetickou posloupnost.

Příklad: Počet ok na hodu spravedlivou 6-stěnnou kostkou.



rozdělení



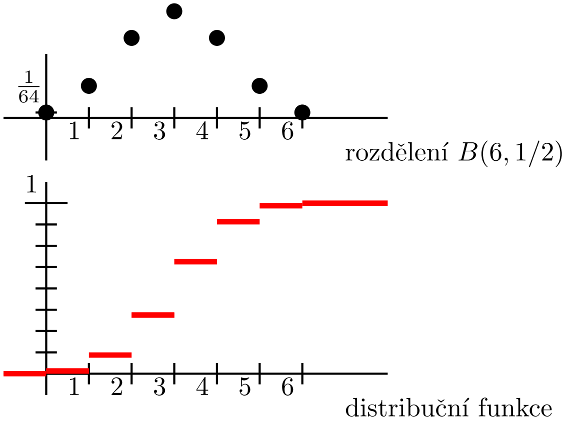
distribuční funkce

Binomické rozdělení

- X má binomické rozdělení $B(n, p)$, pokud nabývá hodnot $0, 1, \ldots, n$ a $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- Například počet jedniček při n hodech nespravedlivou mincí má binomické rozdělení $B(n, p)$, pokud jedničku hodíme s pravděpodobností p a nulu s pravděpodobností $1 - p$.

Binomické rozdělení

- X má binomické rozdělení $B(n,p)$, pokud nabývá hodnot $0, 1, \ldots, n$ a $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- Například počet jedniček při n hodech nespravedlivou mincí má binomické rozdělení $B(n,p)$, pokud jedničku hodíme s pravděpodobností p a nulu s pravděpodobností $1-p$.



Pravděpodobnostní důkazy

- Při dokazování matematických tvrzení lze často elegantně využít základy pravděpodobnosti.

Pravděpodobnostní důkazy

- Při dokazování matematických tvrzení lze často elegantně využít základy pravděpodobnosti.
- Ukážeme si jeden příklad níže.

Tvrzení

Nechť G je graf s m hranami. Potom G obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Pravděpodobnostní důkazy

- Při dokazování matematických tvrzení lze často elegantně využít základy pravděpodobnosti.
- Ukážeme si jeden příklad níže.

Tvrzení

Nechť G je graf s m hranami. Potom G obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Důkaz.

- Nechť $G = (V, E)$. Rozdělíme V na disjunktní sjednocení $V = A \sqcup B$.

Pravděpodobnostní důkazy

- Při dokazování matematických tvrzení lze často elegantně využít základy pravděpodobnosti.
- Ukážeme si jeden příklad níže.

Tvrzení

Nechť G je graf s m hranami. Potom G obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Důkaz.

- Nechť $G = (V, E)$. Rozdělíme V na disjunktní sjednocení $V = A \sqcup B$.
- Použijeme pouze hrany vedoucí mezi A a B, tím dostaneme bipartitní podgrafi G'.

Pravděpodobnostní důkazy

- Při dokazování matematických tvrzení lze často elegantně využít základy pravděpodobnosti.
- Ukážeme si jeden příklad níže.

Tvrzení

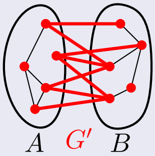
Nechť G je graf s m hranami. Potom G obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Důkaz.

- Nechť $G = (V, E)$. Rozdělíme V na disjunktní sjednocení $V = A \sqcup B$.
- Použijeme pouze hrany vedoucí mezi A a B, tím dostaneme bipartitní podgrafi G'.
- Chceme tedy vhodně zvolit toto dělení, aby hran mezi A a B bylo co nejvíce.

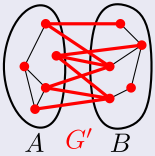
Pravděpodobnostní důkaz, pokračování

Důkaz, pokrač.



Pravděpodobnostní důkaz, pokračování

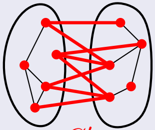
Důkaz, pokrač.



- Pro každý vrchol $v \in V$ si hodíme mincí. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ho dáme do A, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ do B (nezávisle na ostatních vrcholech).

Pravděpodobnostní důkaz, pokračování

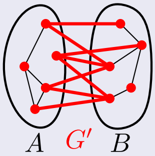
Důkaz, pokrač.



- Pro každý vrchol $v \in V$ si hodíme mincí. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ho dáme do A, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ do B (nezávisle na ostatních vrcholech).
- Pro $e \in E$ určíme pravděpodobnost $P[e \in E(G')]$.

Pravděpodobnostní důkaz, pokračování

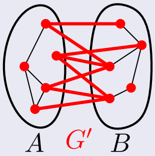
Důkaz, pokrač.



- Pro každý vrchol $v \in V$ si hodíme minci. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ho dáme do A, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ do B (nezávisle na ostatních vrcholech).
- Pro $e \in E$ určíme pravděpodobnost $P[e \in E(G')]$.
- Ta je $\frac{1}{2}$, její vrcholy musejí padnout do různých částí.

Pravděpodobnostní důkaz, pokračování

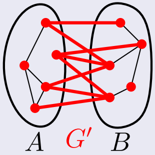
Důkaz, pokrač.



- Pro každý vrchol $v \in V$ si hodíme mincí. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ho dáme do A, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ do B (nezávisle na ostatních vrcholech).
- Pro $e \in E$ určíme pravděpodobnost $P[e \in E(G')]$.
- Ta je $\frac{1}{2}$, její vrcholy musejí padnout do různých částí.
- Označme I_e indikátor jevu "$e \in E(G')$".

Pravděpodobnostní důkaz, pokračování

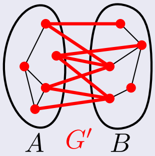
Důkaz, pokrač.



- Pro každý vrchol $v \in V$ si hodíme mincí. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ho dáme do A, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ do B (nezávisle na ostatních vrcholech).
- Pro $e \in E$ určíme pravděpodobnost $P[e \in E(G')]$.
- Ta je $\frac{1}{2}$, její vrcholy musejí padnout do různých částí.
- Označme I_e indikátor jevu "$e \in E(G')$".
- Nechť $X = \sum_{e \in E} I_e$ je počet hran G'.

Pravděpodobnostní důkaz, pokračování

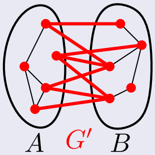
Důkaz, pokrač.



- Pro každý vrchol $v \in V$ si hodíme mincí. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ho dáme do A, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ do B (nezávisle na ostatních vrcholech).
- Pro $e \in E$ určíme pravděpodobnost $P[e \in E(G')]$.
- Ta je $\frac{1}{2}$, její vrcholy musejí padnout do různých částí.
- Označme I_e indikátor jevu "$e \in E(G')$".
- Nechť $X = \sum_{e \in E} I_e$ je počet hran G'.
- Pak $E[X] = \sum_{e \in E} E[I_e] = \sum_{e \in E} P[e \in E(G')] = \frac{m}{2}$.

Pravděpodobnostní důkaz, pokračování

Důkaz, pokrač.



- Pro každý vrchol $v \in V$ si hodíme mincí. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ ho dáme do A, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ do B (nezávisle na ostatních vrcholech).
- Pro $e \in E$ určíme pravděpodobnost $P[e \in E(G')]$.
- Ta je $\frac{1}{2}$, její vrcholy musejí padnout do různých částí.
- Označme I_e indikátor jevu "$e \in E(G')$".
- Nechť $X = \sum_{e \in E} I_e$ je počet hran G'.
- Pak $E[X] = \sum_{e \in E} E[I_e] = \sum_{e \in E} P[e \in E(G')] = \frac{m}{2}$.
- Jelikož střední hodnota X je $\frac{m}{2}$, musí existovat volba A a B, při které má G' alespoň $\frac{m}{2}$ hran. $\square$