# Základy diskrétní pravděpodobnosti

**Motivace:** Máme nějakou událost, která se může a nemusí vyskytnout, chceme určit pravděpodobnost, že se vyskytne.

# Základy diskrétní pravděpodobnosti

**Motivace:** Máme nějakou událost, která se může a nemusí vyskytnout, chceme určit pravděpodobnost, že se vyskytne.

Např:

- Hodíme třikrát šestistěnnou kostkou a chceme určit pravděpodobnost, jestli padne aspoň jedna šestka.

# Základy diskrétní pravděpodobnosti

**Motivace:** Máme nějakou událost, která se může a nemusí vyskytnout, chceme určit pravděpodobnost, že se vyskytne.

Např:

- Hodíme třikrát šestistěnnou kostkou a chceme určit pravděpodobnost, jestli padne aspoň jedna šestka.
- Chceme určit pravděpodobnost, že dnes bude na Pardubicku sněžit.

# Základy diskrétní pravděpodobnosti

**Motivace:** Máme nějakou událost, která se může a nemusí vyskytnout, chceme určit pravděpodobnost, že se vyskytne.

Např:

- Hodíme třikrát šestistěnnou kostkou a chceme určit pravděpodobnost, jestli padne aspoň jedna šestka.
- Chceme určit pravděpodobnost, že dnes bude na Pardubicku sněžit.

Intuitivně: kdybychom pokus/událost mohli mnohokrát opakovat, tak výsledná pravděpodobnost bude počet příznivých událostí děleno počtem opakování.

# Základy diskrétní pravděpodobnosti

**Motivace:** Máme nějakou událost, která se může a nemusí vyskytnout, chceme určit pravděpodobnost, že se vyskytne.

Např:

- Hodíme třikrát šestistěnnou kostkou a chceme určit pravděpodobnost, jestli padne aspoň jedna šestka.
- Chceme určit pravděpodobnost, že dnes bude na Pardubicku sněžit.

Intuitivně: kdybychom pokus/událost mohli mnohokrát opakovat, tak výsledná pravděpodobnost bude počet příznivých událostí děleno počtem opakování.

- Vytvoříme si vhodný matematický model, ale při aplikaci na reálné situace je stále potřeba opatrnosti.

# Příklady využití pravděpodobnosti

- Randomizované algoritmy (algoritmus činí náhodné volby); jsou často rychlejší a jednodušší.

# Příklady využití pravděpodobnosti

- Randomizované algoritmy (algoritmus činí náhodné volby); jsou často rychlejší a jednodušší.
- Pravděpodobnostní důkazy (chceme dokázat existenci grafu s vlastností $V$; zvolíme graf náhodně a ukážeme, že náhodný graf má vlastnost $V$ s kladnou pravděpodobností).

# Příklady využití pravděpodobnosti

- Randomizované algoritmy (algoritmus činí náhodné volby); jsou často rychlejší a jednodušší.
- Pravděpodobnostní důkazy (chceme dokázat existenci grafu s vlastností $V$; zvolíme graf náhodně a ukážeme, že náhodný graf má vlastnost $V$ s kladnou pravděpodobností).
- Předpovědi událostí (předpověď počasí).

# Příklady využití pravděpodobnosti

- Randomizované algoritmy (algoritmus činí náhodné volby); jsou často rychlejší a jednodušší.
- Pravděpodobnostní důkazy (chceme dokázat existenci grafu s vlastností $V$; zvolíme graf náhodně a ukážeme, že náhodný graf má vlastnost $V$ s kladnou pravděpodobností).
- Předpovědi událostí (předpověď počasí).
- Statistické testy (spam filtr).

# Úvodní příklady

Máme náhodný experiment, symbolem $\Omega$ označme všechny možné výsledky:

# Úvodní příklady

Máme náhodný experiment, symbolem $\Omega$ označme všechny možné výsledky:

- Hod mincí: $\Omega = \{L, R\}$.

# Úvodní příklady

Máme náhodný experiment, symbolem $\Omega$ označme všechny možné výsledky:

- Hod mincí: $\Omega = \{L, R\}$.
- Hod šestistěnnou kostkou: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

# Úvodní příklady

Máme náhodný experiment, symbolem $\Omega$ označme všechny možné výsledky:

- Hod mincí: $\Omega = \{L, R\}$.
- Hod šestistěnnou kostkou: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Hod třemi mincemi:
  $\Omega = \{LLL, LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR\}$.
- Začne pršet, a zajímá nás místo dopadu první kapky na čtvercový stůl: $\Omega = [0, 1]^2$.

# Úvodní příklady

Máme náhodný experiment, symbolem $\Omega$ označme všechny možné výsledky:

- Hod mincí: $\Omega = \{L, R\}$.
- Hod šestistěnnou kostkou: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Hod třemi mincemi:
  $\Omega = \{LLL, LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR\}$.
- Začne pršet, a zajímá nás místo dopadu první kapky na čtvercový stůl: $\Omega = [0, 1]^2$.

Prvky $\Omega$ nazýváme elementární jevy. Dále jev je nějaká podmnožina $\Omega$.

# Úvodní příklady

Máme náhodný experiment, symbolem $\Omega$ označme všechny možné výsledky:

- Hod mincí: $\Omega = \{L, R\}$.
- Hod šestistěnnou kostkou: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Hod třemi mincemi:
  $\Omega = \{LLL, LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR\}$.
- Začne pršet, a zajímá nás místo dopadu první kapky na čtvercový stůl: $\Omega = [0, 1]^2$.

Prvky $\Omega$ nazýváme elementární jevy. Dále jev je nějaká podmnožina $\Omega$.

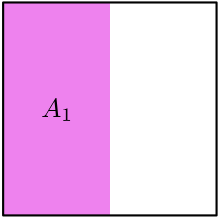
- Hod mincí, 4 možné jevy:
  - $A_1 = \{L\}$ (padne líc)
  - $A_2 = \{R\}$ (padne rub)
  - $A_3 = \{L, R\}$ (padne líc nebo rub, jistý jev)
  - $A_4 = \emptyset$ (nepadne nic, nemožný jev)

# Úvodní příklady, pokračování

- Hod šestistěnnou kostkou ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}$), příklady jevů:
  - $A_1 = \{2\}$ (padne dvojka)
  - $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (padne sudé číslo)
  - $A_3 = \emptyset$ (nepadne nic)

# Úvodní příklady, pokračování

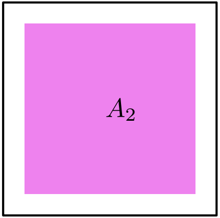
- Hod šestistěnnou kostkou ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}$), příklady jevů:
  - $A_1 = \{2\}$ (padne dvojka)
  - $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (padne sudé číslo)
  - $A_3 = \emptyset$ (nepadne nic)
- Kapka na stole ($\Omega = [0, 1]^2$), příklady jevů:




- $A_1 = [0, 1/2] \times [0, 1]$ (padne na levou půlku).

# Úvodní příklady, pokračování

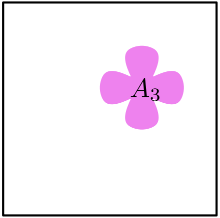
- Hod šestistěnnou kostkou ($\Omega = \{1, \dots, 6\}$), příklady jevů:
  - $A_1 = \{2\}$ (padne dvojka)
  - $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (padne sudé číslo)
  - $A_3 = \emptyset$ (nepadne nic)
- Kapka na stole ($\Omega = [0, 1]^2$), příklady jevů:




- $A_1 = [0, 1/2] \times [0, 1]$ (padne na levou půlku).
- $A_2 = [1/10, 9/10] \times [1/10, 9/10]$ (nepadne blízko okraje).

# Úvodní příklady, pokračování

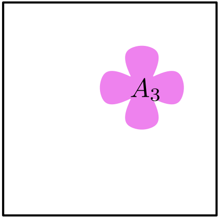
- Hod šestistěnnou kostkou ($\Omega = \{1, \dots, 6\}$), příklady jevů:
    - $A_1 = \{2\}$ (padne dvojka)
    - $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (padne sudé číslo)
    - $A_3 = \emptyset$ (nepadne nic)
- Kapka na stole ($\Omega = [0, 1]^2$), příklady jevů:




- $A_1 = [0, 1/2] \times [0, 1]$ (padne na levou půlku).
- $A_2 = [1/10, 9/10] \times [1/10, 9/10]$ (nepadne blízko okraje).
- $A_3$ viz obrázek (padne na kytičku na ubruse).

## Úvodní příklady, pokračování

- Hod šestistěnnou kostkou ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}$), příklady jevů:
  - $A_1 = \{2\}$ (padne dvojka)
  - $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (padne sudé číslo)
  - $A_3 = \emptyset$ (nepadne nic)
- Kapka na stole ($\Omega = [0, 1]^2$), příklady jevů:

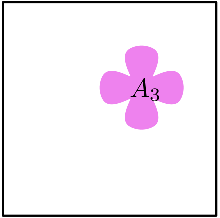



- $A_1 = [0, 1/2] \times [0, 1]$ (padne na levou půlku).
- $A_2 = [1/10, 9/10] \times [1/10, 9/10]$ (nepadne blízko okraje).
- $A_3$ viz obrázek (padne na kytičku na ubruse).

Každému jevu $A$ chceme přiřadit pravděpodobnost $P[A] \in [0, 1]$:

# Úvodní příklady, pokračování

- Hod šestistěnnou kostkou ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}$), příklady jevů:
  - $A_1 = \{2\}$ (padne dvojka)
  - $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (padne sudé číslo)
  - $A_3 = \emptyset$ (nepadne nic)
- Kapka na stole ($\Omega = [0, 1]^2$), příklady jevů:




- $A_1 = [0, 1/2] \times [0, 1]$ (padne na levou půlku).
- $A_2 = [1/10, 9/10] \times [1/10, 9/10]$ (nepadne blízko okraje).
- $A_3$ viz obrázek (padne na kytičku na ubruse).

Každému jevu $A$ chceme přiřadit pravděpodobnost $P[A] \in [0, 1]$:

- Mince: $P[\{L\}] = 1/2$, $P[\{R\}] = 1/2$, $P[\{L, R\}] = 1$, $P[\emptyset] = 0$.
- 6-st. kostka: $P[A_1] = 1/6$, $P[A_2] = 1/2$, $P[A_3] = 0$.
- Kapka: $P[A_1] = 1/2$, $P[A_2] = 64/100 = 64\%$, $P[A_3] \approx 8\%$.

# Diskrétní pravděpodobnostní prostor

## Definice

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

# Diskrétní pravděpodobnostní prostor

## Definice

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

Prvky $\Omega$ se nazývají elementární jevy, podmnožiny $\Omega$ jsou jevy. Pro jev $A \subseteq \Omega$, $P[A]$ je pravděpodobnost jevu $A$. Je-li $\Omega$ konečná, potom $(\Omega, P)$ je (dokonce) konečný pravděpodobnostní prostor.

# Diskrétní pravděpodobnostní prostor

## Definice

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^{\Omega} \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

Prvky $\Omega$ se nazývají elementární jevy, podmnožiny $\Omega$ jsou jevy. Pro jev $A \subseteq \Omega$, $P[A]$ je pravděpodobnost jevu $A$. Je-li $\Omega$ konečná, potom $(\Omega, P)$ je (dokonce) konečný pravděpodobnostní prostor.

## Poznámky

- $P[\emptyset] = 0$ (Prázdná suma je nulová).

# Diskrétní pravděpodobnostní prostor

## Definice

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

Prvky $\Omega$ se nazývají elementární jevy, podmnožiny $\Omega$ jsou jevy. Pro jev $A \subseteq \Omega$, $P[A]$ je pravděpodobnost jevu $A$. Je-li $\Omega$ konečná, potom $(\Omega, P)$ je (dokonce) konečný pravděpodobnostní prostor.

## Poznámky

- $P[\emptyset] = 0$ (Prázdná suma je nulová).
- Jsou-li $A$, $B$ jevy takové, že $A \subseteq B$, potom $P[A] \leq P[B]$

# Diskrétní pravděpodobnostní prostor

## Definice

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

Prvky $\Omega$ se nazývají elementární jevy, podmnožiny $\Omega$ jsou jevy. Pro jev $A \subseteq \Omega$, $P[A]$ je pravděpodobnost jevu $A$. Je-li $\Omega$ konečná, potom $(\Omega, P)$ je (dokonce) konečný pravděpodobnostní prostor.

## Poznámky

- $P[\emptyset] = 0$ (Prázdná suma je nulová).
- Jsou-li $A$, $B$ jevy takové, že $A \subseteq B$, potom $P[A] \leq P[B]$
- Jsou-li $A$ a $B$ dva disjunktní jevy, potom $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

# Obecný pravděpodobnostní prostor

## Definice (Neúplná, nezkouší se)

Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde $\Omega$ je množina, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ a $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ je funkce. Dále $\Omega$, $\mathcal{F}$ a $P$ splňují nějaké axiomy, které tu nebudeme uvádět. Mimo jiné platí:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$, $P[\emptyset] = 0$, $P[\Omega] = 1$.
- Jsou-li $A, B \in \mathcal{F}$ disjunktní, pak $A \cup B \in \mathcal{F}$ a $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

# Obecný pravděpodobnostní prostor

**Definice (Neúplná, nezkouší se)**

Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde $\Omega$ je množina, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ a $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ je funkce. Dále $\Omega$, $\mathcal{F}$ a $P$ splňují nějaké axiomy, které tu nebudeme uvádět. Mimo jiné platí:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$, $P[\emptyset] = 0$, $P[\Omega] = 1$.
- Jsou-li $A, B \in \mathcal{F}$ disjunktní, pak $A \cup B \in \mathcal{F}$ a $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

- Definice výše slouží především jako varování, že s nekonečnými množinami je potřeba pracovat opatrně.

# Obecný pravděpodobnostní prostor

**Definice (Neúplná, nezkouší se)**

Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde $\Omega$ je množina, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ a $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ je funkce. Dále $\Omega$, $\mathcal{F}$ a $P$ splňují nějaké axiomy, které tu nebudeme uvádět. Mimo jiné platí:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$, $P[\emptyset] = 0$, $P[\Omega] = 1$.
- Jsou-li $A, B \in \mathcal{F}$ disjunktní, pak $A \cup B \in \mathcal{F}$ a $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

- Definice výše slouží především jako varování, že s nekonečnými množinami je potřeba pracovat opatrně.
- Obvykle není možné zavést $P$ na všech podmnožinách $\Omega$, ale je potřeba vybrat nějaký vhodný soubor $\mathcal{F}$ podmnožin $\Omega$ na kterých lze pravděpodobnost počítat.

# Obecný pravděpodobnostní prostor

**Definice (Neúplná, nezkouší se)**

Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde $\Omega$ je množina, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ a $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ je funkce. Dále $\Omega$, $\mathcal{F}$ a $P$ splňují nějaké axiomy, které tu nebudeme uvádět. Mimo jiné platí:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$, $P[\emptyset] = 0$, $P[\Omega] = 1$.
- Jsou-li $A, B \in \mathcal{F}$ disjunktní, pak $A \cup B \in \mathcal{F}$ a $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

- Definice výše slouží především jako varování, že s nekonečnými množinami je potřeba pracovat opatrně.
- Obvykle není možné zavést $P$ na všech podmnožinách $\Omega$, ale je potřeba vybrat nějaký vhodný soubor $\mathcal{F}$ podmnožin $\Omega$ na kterých lze pravděpodobnost počítat.
- Pro nekonečné množiny už pravděpodobnost nějakého jevu není určená pravděpodobností elementárních jevů.

# Návrat k diskrétnímu pravděpodobnostnímu prostoru

## Definice (Připomenutí)

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

Prvky $\Omega$ se nazývají elementární jevy, podmnožiny omega jsou jevy. Pro jev $A \subseteq \Omega$, $P[A]$ je pravděpodobnost jevu $A$. Je-li $\Omega$ konečná, potom $(\Omega, P)$ je (dokonce) konečný pravděpodobnostní prostor.

# Návrat k diskrétnímu pravděpodobnostnímu prostoru

## Definice (Připomenutí)

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^{\Omega} \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

Prvky $\Omega$ se nazývají elementární jevy, podmnožiny omega jsou jevy. Pro jev $A \subseteq \Omega$, $P[A]$ je pravděpodobnost jevu $A$. Je-li $\Omega$ konečná, potom $(\Omega, P)$ je (dokonce) konečný pravděpodobnostní prostor.

- Zavedeme-li $p(\omega) := P[\{\omega\}]$ pro $\omega \in \Omega$, potom $P[A] = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$.

# Návrat k diskrétnímu pravděpodobnostnímu prostoru

## Definice (Připomenutí)

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^{\Omega} \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

Prvky $\Omega$ se nazývají elementární jevy, podmnožiny omega jsou jevy. Pro jev $A \subseteq \Omega$, $P[A]$ je pravděpodobnost jevu $A$. Je-li $\Omega$ konečná, potom $(\Omega, P)$ je (dokonce) konečný pravděpodobnostní prostor.

- Zavedeme-li $p(\omega) := P[\{\omega\}]$ pro $\omega \in \Omega$, potom $P[A] = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$.
- Tedy $P\colon 2^{\Omega} \to [0,1]$ z definice výše jednoznačně určuje $p\colon \Omega \to [0,1]$ takovou, že $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ a naopak.

# Návrat k diskrétnímu pravděpodobnostnímu prostoru

## Definice (Připomenutí)

Diskrétní pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná nebo spočetná množina (existuje prostá funkce z $\Omega$ do $\mathbb{N}$) a $P\colon 2^{\Omega} \to [0,1]$ je funkce splňující

1. $P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ pro libovolnou $A \subseteq \Omega$,
2. $P[\Omega] = 1$.

Prvky $\Omega$ se nazývají elementární jevy, podmnožiny omega jsou jevy. Pro jev $A \subseteq \Omega$, $P[A]$ je pravděpodobnost jevu $A$. Je-li $\Omega$ konečná, potom $(\Omega, P)$ je (dokonce) konečný pravděpodobnostní prostor.

- Zavedeme-li $p(\omega) := P[\{\omega\}]$ pro $\omega \in \Omega$, potom $P[A] = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$.
- Tedy $P\colon 2^{\Omega} \to [0,1]$ z definice výše jednoznačně určuje $p\colon \Omega \to [0,1]$ takovou, že $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ a naopak.
- Je-li $\Omega$ konečná a $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ pro každé $\omega \in \Omega$, potom $(\Omega, P)$ je tzv. uniformní pravděpodobnostní prostor.

# Příklady uniformních prostorů

- $n$ hodů mincí: $\Omega = \{0, 1\}^n$, každý elementární jev má pravděpodobnost $\frac{1}{2^n}$.

# Příklady uniformních prostorů

- $n$ hodů mincí: $\Omega = \{0,1\}^n$, každý elementární jev má pravděpodobnost $\frac{1}{2^n}$.
- náhodná permutace: $\Omega = S_n$ (symetrická grupa permutací na $n$ prvcích); každý elementární jev má pravděpodobnost $\frac{1}{n!}$.

# Podmíněná pravděpodobnost, příklad

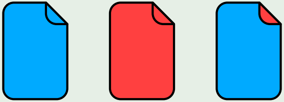
- Systematické porozumění pravděpodobnosti umožňuje odhalit řešení některých situací, které nejsou na první pohled zřejmé.

# Podmíněná pravděpodobnost, příklad

- Systematické porozumění pravděpodobnosti umožňuje odhalit řešení některých situací, které nejsou na první pohled zřejmé.

**Příklad**

Máme tři karty, jedna z obou stran modrá, jedna z obou stran červená, jedna z jedné strany červená a z druhé modrá. Karty náhodně zamícháme (můžeme otáčet), jednu vylosujeme a položíme na stůl, aniž by bylo vidět, co je na spodní straně. Karta je seshora červená. Jaká je pravděpodobnost, že je červená i zespoda?

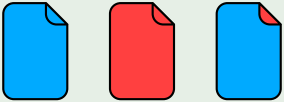


# Podmíněná pravděpodobnost, příklad

- Systematické porozumění pravděpodobnosti umožňuje odhalit řešení některých situací, které nejsou na první pohled zřejmé.

## Příklad

Máme tři karty, jedna z obou stran modrá, jedna z obou stran červená, jedna z jedné strany červená a z druhé modrá. Karty náhodně zamícháme (můžeme otáčet), jednu vylosujeme a položíme na stůl, aniž by bylo vidět, co je na spodní straně. Karta je seshora červená. Jaká je pravděpodobnost, že je červená i zespoda?



Máme šest možností, jak vybrat kartu a její otočení (3 pro kartu krát 2 pro otočení). Ve třech případech je karta shora červená, ve dvou z nich je červená i zespoda, v jednom je zespoda modrá.

# Podmíněná pravděpodobnost

**Definice**

Nechť $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy takové, že $P[B] > 0$, kde $(\Omega, P)$ je (diskrétní) pravděpodobnostní prostor. Podmíněná pravděpodobnost jevu $A$ za podmínky $B$ je definovaná jako $P[A \cap B]/P[B]$.

# Podmíněná pravděpodobnost

## Definice

Nechť $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy takové, že $P[B] > 0$, kde $(\Omega, P)$ je (diskrétní) pravděpodobnostní prostor. Podmíněná pravděpodobnost jevu $A$ za podmínky $B$ je definovaná jako $P[A \cap B]/P[B]$.

## Pozorování

*Nechť $A, B_1, \ldots, B_n$ jsou takové, že $B_1, \ldots, B_n$ jsou po dvou disjunktní a dohromady pokrývají $\Omega$. Potom*

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + \cdots + P[A|B_n]P[B_n].$$

# Příklad, testování

## Příklad

Předpokládejme, že $0,1\%$ populace je HIV pozitivních. Máme test na HIV s následující tabulkou spolehlivosti:

| | | odpověď testu | |
|---|---|---|---|
| | | ANO | NE |
| testovaný | ANO | 99% | 1% |
| nakažený | NE | 5% | 95% |

Přijde náhodně vybraná osoba a nechá se otestovat. Test odpoví ANO. Jaké je pravděpodobnost, že je daná osoba pozitivní?

# Příklad, testování

## Příklad

Předpokládejme, že $0,1\%$ populace je HIV pozitivních. Máme test na HIV s následující tabulkou spolehlivosti:

| | | odpověď testu | |
|---|---|---|---|
| | | ANO | NE |
| testovaný | ANO | 99% | 1% |
| nakažený | NE | 5% | 95% |

Příjde náhodně vybraná osoba a nechá se otestovat. Test odpoví ANO. Jaké je pravděpodobnost, že je daná osoba pozitivní?

## Řešení.

- Jev $H$: osoba je HIV pozitivní. Jev $T$: Test odpoví ano.

# Příklad, testování

## Příklad

Předpokládejme, že $0,1\%$ populace je HIV pozitivních. Máme test na HIV s následující tabulkou spolehlivosti:

| | | odpověď testu | |
|---|---|---|---|
| | | ANO | NE |
| testovaný | ANO | 99% | 1% |
| nakažený | NE | 5% | 95% |

Příjde náhodně vybraná osoba a nechá se otestovat. Test odpoví ANO. Jaké je pravděpodobnost, že je daná osoba pozitivní?

## Řešení.

- Jev $H$: osoba je HIV pozitivní. Jev $T$: Test odpoví ano.
- Chceme $P[H|T]$.

# Příklad, testování

## Příklad

Předpokládejme, že $0,1\%$ populace je HIV pozitivních. Máme test na HIV s následující tabulkou spolehlivosti:

| | | odpověď testu | |
|---|---|---|---|
| | | ANO | NE |
| testovaný | ANO | 99% | 1% |
| nakažený | NE | 5% | 95% |

Příjde náhodně vybraná osoba a nechá se otestovat. Test odpoví ANO. Jaké je pravděpodobnost, že je daná osoba pozitivní?

## Řešení.

- Jev $H$: osoba je HIV pozitivní. Jev $T$: Test odpoví ano.
- Chceme $P[H|T]$.
- $P[H|T] = \frac{P[H\cap T]}{P[T]} = \frac{P[T|H]P[H]}{P[T|H]P[H]+P[T|H^c]P[H^c]} =$

# Příklad, testování

## Příklad

Předpokládejme, že $0,1\%$ populace je HIV pozitivních. Máme test na HIV s následující tabulkou spolehlivosti:

| | | odpověď testu | |
|---|---|---|---|
| | | ANO | NE |
| testovaný | ANO | 99% | 1% |
| nakažený | NE | 5% | 95% |

Příjde náhodně vybraná osoba a nechá se otestovat. Test odpoví ANO. Jaké je pravděpodobnost, že je daná osoba pozitivní?

## Řešení.

- Jev $H$: osoba je HIV pozitivní. Jev $T$: Test odpoví ano.
- Chceme $P[H|T]$.
- $P[H|T] = \frac{P[H \cap T]}{P[T]} = \frac{P[T|H]P[H]}{P[T|H]P[H] + P[T|H^c]P[H^c]} =$
  $= \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.99 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999} \approx 2\%.$ □

# Bayesova věta

**Věta (Bayesova věta)**

*Nechť* $(\Omega, P)$ *je diskrétní pravděpodobnostní prostor a* $A, B_1, \dots, B_n \subseteq \Omega$ *jsou jevy s kladnou pravděpodobností takové, že* $B_1, \dots, B_n$ *jsou po dvou disjunktní a pokrývají* $\Omega$*. Potom*

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j]P[B_j]}.$$

# Bayesova věta

## Věta (Bayesova věta)

*Nechť* $(\Omega, P)$ *je diskrétní pravděpodobnostní prostor a* $A, B_1, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ *jsou jevy s kladnou pravděpodobností takové, že* $B_1, \ldots, B_n$ *jsou po dvou disjunktní a pokrývají* $\Omega$. *Potom*

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j]P[B_j]}.$$

## Důkaz.

$$\frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j]P[B_j]} =$$

# Bayesova věta

## Věta (Bayesova věta)

*Nechť* $(\Omega, P)$ *je diskrétní pravděpodobnostní prostor a* $A, B_1, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ *jsou jevy s kladnou pravděpodobností takové, že* $B_1, \ldots, B_n$ *jsou po dvou disjunktní a pokrývají* $\Omega$*. Potom*

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j]P[B_j]}.$$

## Důkaz.

$$\frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j]P[B_j]} = \frac{P[A \cap B_i]}{P[A]} =$$

# Bayesova věta

## Věta (Bayesova věta)

*Nechť $(\Omega, P)$ je diskrétní pravděpodobnostní prostor a $A, B_1, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ jsou jevy s kladnou pravděpodobností takové, že $B_1, \ldots, B_n$ jsou po dvou disjunktní a pokrývají $\Omega$. Potom*

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j]P[B_j]}.$$

## Důkaz.

$$\frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j]P[B_j]} = \frac{P[A \cap B_i]}{P[A]} = P[B_i|A].$$

$\square$

# Nezávislost jevů

## Definice

Nechť $(\Omega, P)$ je (diskrétní) pravděpodobnostní prostor. Dva jevy $A, B \subseteq \Omega$ jsou nezávislé, pokud $P[A \cap B] = P[A]P[B]$.
Ekvivalentně $P[A|B] = P[A]$ nebo $P[B] = 0$.

# Nezávislost jevů

## Definice

Nechť $(\Omega, P)$ je (diskrétní) pravděpodobnostní prostor. Dva jevy $A, B \subseteq \Omega$ jsou nezávislé, pokud $P[A \cap B] = P[A]P[B]$. Ekvivalentně $P[A|B] = P[A]$ nebo $P[B] = 0$. Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pokud $\forall I \subseteq [n]$ platí

$$P[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} P[A_i].$$

# Nezávislost jevů

## Definice

Nechť $(\Omega, P)$ je (diskrétní) pravděpodobnostní prostor. Dva jevy $A, B \subseteq \Omega$ jsou nezávislé, pokud $P[A \cap B] = P[A]P[B]$. Ekvivalentně $P[A|B] = P[A]$ nebo $P[B] = 0$. Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pokud $\forall I \subseteq [n]$ platí

$$P[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} P[A_i].$$

## Příklad

Mějme náhodnou posloupnost $n \geq 7$ nul a jedniček a jevy:

- $A_1 = \{$posloupnosti s prvními pěti hodnotami 1$\}$,
- $A_2 = \{$posloupnosti s šestou hodnotou 0$\}$,
- $A_3 = \{$posloupnosti, kde součet prvních šesti hodnot je sudý$\}$.

# Nezávislost jevů

## Definice

Nechť $(\Omega, P)$ je (diskrétní) pravděpodobnostní prostor. Dva jevy $A, B \subseteq \Omega$ jsou nezávislé, pokud $P[A \cap B] = P[A]P[B]$. Ekvivalentně $P[A|B] = P[A]$ nebo $P[B] = 0$. Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pokud $\forall I \subseteq [n]$ platí

$$P[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} P[A_i].$$

## Příklad

Mějme náhodnou posloupnost $n \geq 7$ nul a jedniček a jevy:

- $A_1 = \{$posloupnosti s prvními pěti hodnotami 1$\}$,
- $A_2 = \{$posloupnosti s šestou hodnotou 0$\}$,
- $A_3 = \{$posloupnosti, kde součet prvních šesti hodnot je sudý$\}$.

Pak $A_1$, $A_2$ a $A_3$ jsou po dvou nezávislé, ale všechny tři nezávislé nejsou.

# Nezávislost jevů - další příklad

## Příklad

Uvažujme náhodnou permutaci $\pi \in S_{32}$ a jevy

- $A_1 = \{\pi \in S_{32} \colon \pi(1) = 1\}$,
- $A_2 = \{\pi \in S_{32} \colon \pi(2) = 2\}$.

# Nezávislost jevů - další příklad

## Příklad

Uvažujme náhodnou permutaci $\pi \in S_{32}$ a jevy

- $A_1 = \{\pi \in S_{32} \colon \pi(1) = 1\}$,
- $A_2 = \{\pi \in S_{32} \colon \pi(2) = 2\}$.

Potom $P[A_1] = P[A_2] = \frac{1}{32}$, ale $P[A_2|A_1] = \frac{1}{31}$. Jevy tedy nejsou nezávislé.

# Součin pravděpodobnostních prostorů

## Definice

Nechť $(\Omega_1, P_1), \ldots, (\Omega_n, P_n)$ jsou diskrétní pravděpodobnostní prostory. Potom jejich (kartézský) součin je diskrétní pravděpodobnostní prostor $(\Omega, P)$ takový, že

- $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ a
- $P[A] = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in A} P_1[\omega_1] \cdots P_n[\omega_n]$ pro $A \subseteq \Omega$.

# Součin pravděpodobnostních prostorů

## Definice

Nechť $(\Omega_1, P_1), \ldots, (\Omega_n, P_n)$ jsou diskrétní pravděpodobnostní prostory. Potom jejich (kartézský) součin je diskrétní pravděpodobnostní prostor $(\Omega, P)$ takový, že

- $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ a
- $P[A] = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in A} P_1[\omega_1] \cdots P_n[\omega_n]$ pro $A \subseteq \Omega$.

## Příklady

- Je-li $(\Omega, P)$ pravděpodobnostní prostor odpovídající jednomu hodu mincí, potom součin $(\Omega, P) \times (\Omega, P) \times \cdots \times (\Omega, P)$ odpovídá $n$ hodům mincí.

# Součin pravděpodobnostních prostorů

## Definice

Nechť $(\Omega_1, P_1), \ldots, (\Omega_n, P_n)$ jsou diskrétní pravděpodobnostní prostory. Potom jejich (kartézský) součin je diskrétní pravděpodobnostní prostor $(\Omega, P)$ takový, že

- $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ a
- $P[A] = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in A} P_1[\omega_1] \cdots P_n[\omega_n]$ pro $A \subseteq \Omega$.

## Příklady

- Je-li $(\Omega, P)$ pravděpodobnostní prostor odpovídající jednomu hodu mincí, potom součin $(\Omega, P) \times (\Omega, P) \times \cdots \times (\Omega, P)$ odpovídá $n$ hodům mincí.
- Je-li $(\Omega, P)$ pravděpodobnostní prostor odpovídající jednomu hodu kostkou, potom součin $(\Omega, P) \times (\Omega, P) \times \cdots \times (\Omega, P)$ odpovídá $n$ hodům kostkou.

# Součin pravděpodobnostních prostorů

## Definice

Nechť $(\Omega_1, P_1), \ldots, (\Omega_n, P_n)$ jsou diskrétní pravděpodobnostní prostory. Potom jejich (kartézský) součin je diskrétní pravděpodobnostní prostor $(\Omega, P)$ takový, že

- $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ a
- $P[A] = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in A} P_1[\omega_1] \cdots P_n[\omega_n]$ pro $A \subseteq \Omega$.

## Příklady

- Je-li $(\Omega, P)$ pravděpodobnostní prostor odpovídající jednomu hodu mincí, potom součin $(\Omega, P) \times (\Omega, P) \times \cdots \times (\Omega, P)$ odpovídá $n$ hodům mincí.
- Je-li $(\Omega, P)$ pravděpodobnostní prostor odpovídající jednomu hodu kostkou, potom součin $(\Omega, P) \times (\Omega, P) \times \cdots \times (\Omega, P)$ odpovídá $n$ hodům kostkou.

# Náhodný graf $G(n, p)$.

## Definice

Mějme $n$ přirozené a $p \in [0, 1]$. Potom náhodný graf $G(n, p)$ definujeme jako pravděpodobnostní prostor $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je množina všech grafů s množinou vrcholů $[n]$ a pro graf $G \in \Omega$ máme $P[G] = p^m (1-p)^{\binom{n}{2} - m}$, kde $m$ je počet hran grafu $G$.

# Náhodný graf $G(n, p)$.

## Definice

Mějme $n$ přirozené a $p \in [0, 1]$. Potom náhodný graf $G(n, p)$ definujeme jako pravděpodobnostní prostor $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je množina všech grafů s množinou vrcholů $[n]$ a pro graf $G \in \Omega$ máme $P[G] = p^m(1 - p)^{\binom{n}{2} - m}$, kde $m$ je počet hran grafu $G$.

Vysvětlení definice:

- Náhodný graf v $G(n, p)$ vytvoříme tak, že pro každou možnou hranu si hodíme (nespravedlivou) kostkou a s pravděpodobností $p$ ji do grafu umístíme a s pravděpodobností $(1 - p)$ ji do grafu nedáme, nezávisle na ostatních možných hranách.

# Náhodný graf $G(n, p)$.

## Definice

Mějme $n$ přirozené a $p \in [0, 1]$. Potom náhodný graf $G(n, p)$ definujeme jako pravděpodobnostní prostor $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je množina všech grafů s množinou vrcholů $[n]$ a pro graf $G \in \Omega$ máme $P[G] = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$, kde $m$ je počet hran grafu $G$.

Vysvětlení definice:

- Náhodný graf v $G(n, p)$ vytvoříme tak, že pro každou možnou hranu si hodíme (nespravedlivou) kostkou a s pravděpodobností $p$ ji do grafu umístíme a s pravděpodobností $(1-p)$ ji do grafu nedáme, nezávisle na ostatních možných hranách.
- Můžeme ztotožnit se součinovým prostorem $\prod_e(\Omega_e, P_e)$, kde součin je přes všechny hrany $e$ a $\Omega_e = \{0, 1\}$, $P_e[\{0\}] = (1-p)$, $P_e[\{1\}] = p$.