Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte matematickou indukcí:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

b) $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$.

c) $\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n$.

d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

e) $\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$.

Úloha 2: Dokažte matematickou indukcí $4|(6n^2 + 2n)$.

Úloha 3: Dokažte, že pro Fibonacciovu posloupnost $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ platí:

a) $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

b) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

c) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

d) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.

Úloha 4: Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n, které neobsahují dvě nuly těsně vedle sebe, je roven F_{n+2}.

Úloha 5: Dokažte, že každé přirozené číslo n lze jednoznačně napsat jako součet různých Fibonacciho čísel takových, že v součtu nejsou žádná dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla.

Formálně: n lze jednoznačně napsat ve tvaru $n = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j}$, kde $i_1 \geq 2$ a pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ je $i_{j+1} \geq i_j + 2$.

Úloha 6: Je dáno reálné číslo x takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé přirozené n je i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé.

Úloha 7: Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno náhodně vybrané políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi, která mají tvar „L“ a přitom zabírají tři políčka.

Úloha 8: Uvažte tabulku čokolády o $m \times n$ dílcích. Určete, kolikrát budete muset nějakou část čokolády rozlomit na dvě menší části než dostanete mn jednotlivých dílků.

Závisí výsledný počet lámání na zvoleném postupu?

Úloha 9: Zjistěte, které z následujících vztahů pro symetrickou diferenci $\oplus$ definovanou $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ platí, a které neplatí.

- $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
- $A \oplus B = B \oplus A$
- $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- $A \oplus (B \oplus A) = A$
- $A \oplus A = \emptyset$
- $A \oplus \emptyset = A$

Pokud neplatí, opravte ji pokud možno co nejmenším zásahem.

Úloha 10: Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

a) $A \setminus B = \emptyset$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$

e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$

f) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 11: Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?