Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 2: Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf sudý počet hran, tak buď k nebo $|V_G|$ je sudé.

Úloha 3: Pro každá dvě přirozená čísla k, n taková, že $k < n$ a součin kn je sudý, najděte příklad k-regulárního grafu na n vrcholech.

Úloha 4: Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic.

Je rozklad jednoznačný? Pokud ne, je počet kružnic v rozkladu dán jednoznačně?

Úloha 5: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 6: Má-li $2k$-regulární graf sudý počet hran v každé komponentě, potom má dva hranově disjunktní k-faktory. Dokažte.

(Definice: k-regulární graf má všechny vrcholy stupně k; faktor je podgraf se stejnou množinou vrcholů; k-faktor je k-regulární faktor).

Úloha 7: Dokažte: Orientovaný graf G má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven jeho výstupnímu stupni.

Také dokažte silnější variantu tohoto tvrzení, kde silná souvislost je nahrazena slabou souvislostí.

(Silná souvislost znamená, že mezi každou dvojicí vrcholů u a v vede jak orientovaná cesta z u do v, tak orientovaná cesta z v do u. Slabá souvislost znamená, že mezi libovolnými dvěma vrcholy vede cesta jejíž hrany mohou být orientovány jak po, tak proti směru cesty.)

Úloha 8: Ukažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf též eulerovský.

Platí i obrácená implikace?

Line graf $L(G)$ má za vrcholy hrany G a dva vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany e a f spolu sousedí právě když e a f mají společný vrchol.

Úloha 9: Rohodněte, jestli je graf na obrázku rovinný či nikoli.