

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte matematickou indukci:

- a) $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.
- b) $\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$.
- c) $\sum_{i=1}^n 4i + 5 = 2n^2 + 7n$.
- d) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.
- e) $\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$.

Úloha 2: Dokažte matematickou indukci $4|(6n^2 + 2n)$.

Úloha 3: Dokažte, že pro Fibonacciovu posloupnost $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ platí:

- a) $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.
- b) $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$.
- c) $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$.
- d) $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$.

Úloha 4: Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n , které neobsahují dvě nuly těsně vedle sebe, je roven F_{n+2} .

Úloha 5: Dokažte, že každé přirozené číslo n lze jednoznačně napsat jako součet různých Fibonacciho čísel takových, že v součtu nejsou žádná dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla.

Formálně: n lze jednoznačně napsat ve tvaru $n = \sum_{j=1}^k F_{i_j}$, kde $i_1 \geq 2$ a pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$

je $i_{j+1} \geq i_j + 2$.

Úloha 6: Je dáno reálné číslo x takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé přirozené n je i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé.

Úloha 7: Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno náhodně vybrané políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždít dlaždicemi, která mají tvar „L“ a přitom zabírají tři políčka.

Úloha 8: Uvažte tabulku čokolády o $m \times n$ dílcích. Určete, kolikrát budete muset nějakou část čokolády rozlomit na dvě menší části než dostanete mn jednotlivých dílků.

Závisí výsledný počet lámání na zvoleném postupu?

Úloha 9: Zjistěte, které z následujících vztahů pro symetrickou diferenci \oplus definovanou $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ platí, a které neplatí.

- $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
- $A \oplus B = B \oplus A$
- $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- $A \oplus (B \oplus A) = A$
- $A \oplus A = \emptyset$
- $A \oplus \emptyset = A$

Pokud neplatí, opravte ji pokud možno co nejmenším zásahem.

Úloha 10: Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

- a) $A \setminus B = \emptyset$
- b) $A \cup B = B$
- c) $A \cap B = A$
- d) $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$
- e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$
- f) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 11: Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?