Příklady ke cvičení

Příklad 1: Dokažte, že každý eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

Příklad 2: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Příklad 3: Dokažte: orientovaný graf G má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven jeho výstupnímu stupni. Také dokažte variantu předchozího tvrzení, kde silná souvislost je nahrazena slabou souvislostí.

Příklad 4: Ukažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf též Eulerovský.

Příklad 5: Nechť G je graf a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je jeho matice sousednosti. V závislosti na počtu vrcholů a hran určete součet všech prvků A, tj. výraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}.$$

Příklad 6: Nechť G je graf a A jeho matice sousednosti. Jaké prvky má na hlavní diagonále A^3, tj. třetí mocnina A?

Příklad 7: Určete minimální a maximální počet hran v grafu na n vrcholech s c komponentami.

Příklad 8: Navrhněte algoritmus, který pro daný graf zjistí jeho komponenty souvislosti.

Příklad 9: Dokažte, že každý souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.

Příklad 10: Dokažte: graf G je strom právě tehdy, když G nemá kružnice a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Příklad 11: Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

Příklad 12: Dokažte, že na n vrcholech je nejvýše 4^n neizomorfních stromů. Vylepšete odhad až na $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Příklad 13: Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti aspoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Příklad 14: V šachovnici $m \times m$ je $2m$ políček obarvno modře. Na jedno z políček umístíme věž. Věží budeme pohybovat z modrého políčka opět na modré políčko, přičemž se budeme chtít pohybovat střídavě vodorovně a svisle. Dokažte, že je možné věž umístit tak, že když s ní budeme vhodně pohybovat, nikdy nepřestaneme mít možnost udělat další tah.

Příklady ke cvičení

Příklad 1: Dokažte, že každý eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

Příklad 2: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Příklad 3: Dokažte: orientovaný graf G má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven jeho výstupnímu stupni. Také dokažte variantu předchozího tvrzení, kde silná souvislost je nahrazena slabou souvislostí.

Příklad 4: Ukažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf též Eulerovský.

Příklad 5: Nechť G je graf a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je jeho matice sousednosti. V závislosti na počtu vrcholů a hran určete součet všech prvků A, tj. výraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}.$$

Příklad 6: Nechť G je graf a A jeho matice sousednosti. Jaké prvky má na hlavní diagonále A^3, tj. třetí mocnina A?

Příklad 7: Určete minimální a maximální počet hran v grafu na n vrcholech s c komponentami.

Příklad 8: Navrhněte algoritmus, který pro daný graf zjistí jeho komponenty souvislosti.

Příklad 9: Dokažte, že každý souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.

Příklad 10: Dokažte: graf G je strom právě tehdy, když G nemá kružnice a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Příklad 11: Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

Příklad 12: Dokažte, že na n vrcholech je nejvýše 4^n neizomorfních stromů. Vylepšete odhad až na $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Příklad 13: Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti aspoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Příklad 14: V šachovnici $m \times m$ je $2m$ políček obarvno modře. Na jedno z políček umístíme věž. Věží budeme pohybovat z modrého políčka opět na modré políčko, přičemž se budeme chtít pohybovat střídavě vodorovně a svisle. Dokažte, že je možné věž umístit tak, že když s ní budeme vhodně pohybovat, nikdy nepřestaneme mít možnost udělat další tah.