

Příklady ke cvičení

Příklad 1: Určete počet

- uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.
- uspořádaných čtveřic (A, B, C, D) , kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Příklad 2: Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

- $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$
- $$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$
- $$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$
- $$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$
- $$\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$$
- $$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

Příklad 3: Sečtěte:

- $$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$
- $$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$
- $$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$$
- $$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$$

Příklad 4: Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov

- BAR, DEN, RAZIE
- ARZEN, DRAK, DŮM, DŮRAZ

Příklad 5: Kolika způsoby lze umístit 8 kamenů na šachovnici tak 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly 4 kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci.

Příklad 6: Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Příklad 7: Řekneme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, pokud je složené ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvočíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91.

Víme, že počet prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je přirozeně vypadajících čísel menších než 1000?

Příklad 8: Kolik čísel zbyde z $1, \dots, 1000$ po vyškrtání násobků 2, 3, 5 a 7?

Příklad 9: Kolika způsoby lze postavit do řady 5 Čechů, 4 Slováky a 3 Maďary tak, aby všichni příslušníci stejného národa nestáli vedle sebe?

Příklad 10: Na plese je n párů. Kolik je rozdělení do dvojic takových, že žádný pár netančí spolu?