Příklady ke cvičení

Příklad 1: Určete počet různých částečných uspořádání na čtyřech prvcích.

Příklad 2: Nalezněte nejdelší řetězce a antiřetězce na uspořádáních:
$(\{1, \ldots, n\}, |)$ a $(\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}), \subseteq)$.

Příklad 3: Ukažte že každé konečné částečné uspořádání je izomorfní uspořádání inkluzí na nějakém systému množin.

Příklad 4: Nechť $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $g \circ f(x) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí, že $f \circ g(y) = y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce (tedy prosté a na).

Příklad 5: Uvažme relaci "x je dělitelem čísla y" na množině $\{1, \ldots, N\}$.

a) Dokažte, že tato relace je (neostré) uspořádání.

b) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?

c) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?

Příklad 6: Buď X konečná množina a R relace na X anti-symetrická relace. Ukažte, že každá relace $\bar{R} \subset R$ je také anti-symetrická.

Příklad 7: Dokažte následující odhad faktoriálu:

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Příklad 8: Jakou nejvyšší mocninou 5 je dělitelné 50! ? Určete obecný vzorec pro prvočíslo p a faktoriál čísla n.

Příklad 9: Ukažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.

Příklad 10: Kolik existuje permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ s právě jedním cyklem?

Příklad 11: Rozmísťujeme k kuliček do n přikrádek. Doplňte následující tabulku:

Kuličky	V každé přihrádce je		
jsou	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
Různobarevné			
Stejnobarevné			

Příklad 12: Kolik existuje různých rozdělení pravidelného n-úhelníka na vrcholech $1, \ldots, n$ na trojúhelníky, tak že řezy vedou podél úhlopříček, které se vzájemně nekříží a navíc každý trojúhelník má alespoň jednu stranu společnou s n-úhelníkem?. (Takovým rozdělěním se říká triangulace). Např. pětiúhelník lze rozdělit na tři trojúhleníky (1,2,3), (1,3,5) a (3,4,5).

Příklad 13: Z n předmětů vybíráme k. Doplňte následující tabulku:

	nezáleží na pořadí	záleží na pořadí
s opakováním		
bez opakování		

Příklad 14:

a) Kolika způsoby lze postavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?

b) Kolik je možností, kdybychom je za stejných podmínek měli stavět do kruhu?

c) A co když do kruhu budeme stavět opět 5 vodníků, ale 10 čarodejnic?

Příklad 15: Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?