

Příklady ke cvičení

Příklad 1: Rozhodněte, zda jsou následující podmnožiny \mathbb{R}^n kompaktní (zdůvodněte!):

- a) $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x + y + z| \leq 1\}$.
- c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x + y| + z \leq 1\}$.
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 < 10\}$
- e) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Příklad 2: Funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná jako

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + (x \cos(y) - 2x - 3e^y)^2 + 2}.$$

Dokažte, že funkce f na \mathbb{R} nabývá svého maxima.

Příklad 3: Nechtě $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina, jejíž všechny podmnožiny jsou kompaktní. Dokažte, že X je konečná.