Příklady ke cvičení

Příklad 1: Pro množinu X a funkci $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ rozhodněte, zda je funkce ρ metrika.

a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a ρ je dána tabulkou:

	1	2	3	4	5
1	0	2	6	4	4
2	2	0	3	2	4
3	6	3	0	2	4
4	4	2	2	0	4
5	4	4	4	4	0

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a ρ je dána tabulkou:

	1	2	3	4	5
1	0	5	6	5	3
2	5	0	5	8	4
3	6	5	0	5	3
4	5	8	5	0	4
5	3	4	3	4	0

Příklad 2: Najděte příklad metrického prostoru, kde neexistuje střed nějaké úsečky. Tj., nalezněte metrický prostor (X, ρ) a body $x, y \in X$ takové, že neexistuje s splňující $\rho(x, s) = \rho(y, s) = \frac{1}{2}\rho(x, y)$.

Příklad 3: Otevřenou kouli se středem x a poloměrem r v $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou pro účely tohoto příkladu značíme $B(x, r)$.

Uvažme metrický prostor (X, ρ), kde $X = \{(0, 0)\} \cup B((0, 2), 1)$ je podmnožina $\mathbb{R}^2$ a ρ je eukleidovská metrika zúžená na množinu X.

U následujících podmnožin X určete, zda jsou otevřené, a také určete, zda jsou uzavřené.

a) $\{(x_1, x_2) \in X : x_1 = 0\}$.

b) $\{(0, 0)\}$.

c) $B((0, 2), \frac{1}{2})$.

Příklad 4: Pařížská metrika ρ_P (známá též jako pošťácká) na $\mathbb{R}^2$ je definovaná následujícím způsobem:

Nechť o značí počátek souřadnic, tj., bod $(0, 0)$.

Pokud x, y leží na stejné polopřímce vycházející z bodu o, potom

$$\rho_P(x, y) = \|x - y\|,$$

kde $\|x - y\|$ je eukleidovská vzdálenost bodů x a y.

Pokud x, y neleží na stejné polopřímce vycházející z bodu o, potom

$$\rho_P(x, y) = \|x - o\| + \|o - y\|.$$

a) Ověřte, že $(\mathbb{R}^2, \rho_P)$ je skutečně metrický prostor.

b) Nakreslete otevřenou kouli se středem v bodě $(1, 1)$ a poloměrem 2 v (X, ρ_P).

Příklad 5: Newyorská metrika ρ_N (známá též jako L_1 norma) na $\mathbb{R}^2$ je definovaná jako

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

kde $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Dokažte, že $(\mathbb{R}^2, \rho_N)$ je opravdu metrický prostor.

b) Nakreslete otevřenou kouli se středem $(1, 1)$ a poloměrem 2 v $(\mathbb{R}^2, \rho_N)$.

Příklad 6: Nechť X je množina všech omezených reálných funkcí na intervalu $[0, 1]$. Supremovou metriku na X definujeme jako

$$\rho_s(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0, 1]\},$$

kde f ag jsou omezené funkce $[0, 1] \to \mathbb{R}$.

a) Dokažte, že (X, ρ_s) je opravdu metrický prostor.

b) Najděte nekonečně mnoho omezených funkcí $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ pro $n \in N$ takových, že $\rho_s(f_i, f_j) = 1$, pokud $i \neq j$.

Příklad 7: Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Dokažte, že identická funkce $\mathrm{id} \colon X \to x$ definovaná jako $\mathrm{id}(x) = x$ je spojitá.

Příklad 8: Množina $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je definována jako

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 17, xyz - xz + x + y = 3\}.$$

Dokažte, že M je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^3$.