Příklady ke cvičení

Příklad 1: Funkce $y = y(x)$ splňuje $yx = 1$. Spočtěte derivaci y pomocí věty o implicitních funkcích.

Příklad 2: Funkce $z = z(x, y)$ splňuje rovnici $z^3 - 3xyz = a^3$. Spočtěte parciální derivace z.

Příklad 3: Asteroida je dána rovnicí $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Zjistěte v okolí kterých bodů je tato křivka grafem funkce. Spočtěte její derivaci.

Příklad 4: Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

a) Dokažte, že tímto vztahem je definovaná hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$ splňující $z(1, -2) = 1$.

b) Určete $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U.

c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[1, -2]$.

Příklad 5: Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$. Dokažte, že

a) tímto vztahem je definovaná hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$.

b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.

Příklad 6: Pro zadanou funkci f určete globální extrémy funkce f na zadané množině M. Nezapomeňte zdůvodnit, že se opravdu jedná o globální extrémy.

a) $f(x, y) = 2x + y$ a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$.

b) $f(x, y, z) = x + y + z$ a $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

c) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y$ a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 20\}$

d) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y$ a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 20\}$

e) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 4y$ a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

f) $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ a $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0\}$, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Příklad 7: Dokažte, že pro libovolná $x_1, \ldots x_n \geq 0$ platí

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$