Příklady ke cvičení

Příklad 1: Spočtěte následující limity, popř. zdůvodněte, že neexistují.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Příklad 2: Ve kterých bodech jsou následující funkce definovány? Ve kterých jsou spojité? Jsou omezené?

a) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

b) $\cos \frac{1}{xy}$

c) $\frac{1}{1-x^2-y^2}$

d) $\ln \sqrt{x^2+y^2}$

e) $\frac{1}{(x-y)^2}$

f) $\frac{\sin xy}{|x|+|y|}$

Příklad 3: Spočtěte parciální derivace (podle všech proměnných) následujících funkcí:

a) $x^2 + 4xy^3 + y^5$

b) x^{y^2}

c) $(1+x)^k(1+y)^\ell(1+z)^m$, kde k, l, m jsou parametry.

d) $\ln(1+x)\ln(1+y)$

e) $(1+x)^{(1+y)}$

Příklad 4: Ověřte rovnost $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ pro následující funkce:

a) $f(x,y) = x^3 + 4xy - y^2$

b) $f(x,y) = x^{y^2}$

Příklad 5: Nalezněte globální extrémy následujících funkcí (nalezněte také body pdezřelé z lokálních extrémů):

a) $x^2 + (y-1)^2$

b) $x^2 - (y-1)^2$

c) $x^3 + (y-1)^3$

d) $(x-y+1)^2$

e) $(x-y+1)^3$

f) $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$

g) $xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x, y > 0$

h) $(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

i) $\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

j) $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ pro $x, y, z \in [0, \pi]$

Příklad 6: Rozmyslete si, že dané funkce mají totální diferenciál v bodě $(x, y) = (0, 0)$ a napište jeho koeficienty.

a) $(1+x)^k(1+y)^\ell$, kde $k, \ell \in \mathbb{N}$ jsou parametry.

b) $\ln(1+x)\ln(1+y)$

c) $(1+x)^{1+y}$

Příklad 7: Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$f(x, y) = \sqrt{|x||y|}.$$

Uvědomte si, že f je spojitá v bodě $(0, 0)$, spočítejte v tomto bodě $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$. Dokažte však, že f nemá v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál.