Příklady ke cvičení

Příklad 1: Pomocí derivací zjistěte:

a) Který z obdélníků o obvodu ℓ má největší obsah?

b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

c) Z čtvercového papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké máme odstřihnout čtverce v rozích, aby krabička měla co největší objem?

Příklad 2: Dokažte následující nerovnosti:

a) $e^x \geq x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

b) $\ln(x) \leq x - 1$ pro $x \in (0, \infty)$.

c) $x + 1 \geq e^{\frac{x}{1+x}}$ pro $x \in (-1, \infty)$.

d) $\sin x \leq x$ pro $x \geq 0$.

e) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Příklad 3: Nechť $P(x)$ je polynom stupně $n \geq 1$ s kořenem c, tj. $P(c) = 0$. Dokažte, že $P(x) = (x - c)Q(x)$, kde Q je nějaký polynom stupně $n - 1$.

Příklad 4: Nechť

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

je polynom stupně n celými koeficienty (tj. všechna a_i jsou celá). Předpokládejme, že $P(x)$ má racionální kořen $c = \frac{p}{q}$, kde $\frac{p}{q}$ je zlomek v základním tvaru. Dokažte, že a_0 je dělitelné p a a_n je dělitelné q.

Příklad 5: Následující funkce rozložte na parciální zlomky.

a) $\frac{1}{x(x-1)}$

b) $\frac{4}{(x+2)(2x+1)}$

c) $\frac{x+1}{x^2+x-6}$

d) $\frac{x^3}{(x-2)^2}$

e) $\frac{1}{6x^3-19x^2+2x+3}$

f) $\frac{2x+5}{x^3-6x^2-6x-7}$