3. cvičení z MA — 27.10.2008

Suprema a infima

Napřed si zopakujte definici suprema a infima, rozdíl oproti maximu a minimu, uveďte jednoduchý příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Naleznete množinu, která nemá supremum?
Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima? (Dohodněme se, že $\mathbb{N}$ značí množinu $\{1, 2, 3, \dots\}$, zatímco $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.)

1. (a) $A_1 = \{(n-1)/n;\ n \in \mathbb{N}\}$, (b) $A_2 = \{p/(p+q);\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$,

2. (a) $B_1 = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, (b) $B_2 = \{\sin x;\ x \in (0, 2\pi)\}$, (c) $B_3 = \{\sin x;\ x \in (0, \pi)\}$,

3. (a) $C_1 = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$, (b) $C_2 = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}, n > m\}$,
(c) $C_3 = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}, n \le m\}$,

4. (a) $D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$, (b) $D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z}\}$,

5. $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

6. (a) $F_1 = \{\cos(n + 1/n)\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$, (b) $F_2 = \{\cos(n + 1/n)\pi;\ n \in \mathbb{N}$ sudé$\}$,
(c) $F_3 = \{\cos(n + 1/n)\pi;\ n \in \mathbb{N}$ liché$\}$.

Limity posloupností

Co říká definice limity? Spočtěte přímo podle definice limitu posloupností $(\frac{1}{1+n^2})_{n=1}^{\infty}$ a $(\frac{n+1}{n+2})_{n=1}^{\infty}$. Spočtěte následující limity (nebo dokažte, že neexistují). Budou se vám k tomu hodit (mimo snad první příklad) věty o aritmetice limit.

7. (a) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$, (b) $\lim_{n\to\infty} \cos(-1)^n$, (c) $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n!}$, (d) $\lim_{n\to\infty} p^n$.

8. (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2}$, (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-1}$, (c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$, (d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$.

9. (a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}\right)$, (c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

10. (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$, (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right)$, (c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Maličko přitvrdíme … Budeme používat též větu o policajtech.

11. (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a \ge 0)$, (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

12. (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^a + n^{a-1} + \cdots + n + 1}{n^b + n^{b-1} + \cdots + n + 1}$ ($a, b \in \mathbb{N}$ parametry) (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1}{b^n + b^{n-1} + \cdots + b + 1}$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry, $|a|, |b| < 1$)

13. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$,

14. (a) $\lim_{n\to\infty} nq^n$ ($q > 0$ je parametr), (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!}$, (c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$, (d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^3}$, (e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$,
(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n}$ (kde $A, B, C > 0$), (g) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$.

15. (a) $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor}{n^2}$ (parametr $x \in \mathbb{R}$), (c) $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.