Určitý integrál, pomůcky

(Upraveno podle Roberta Šámala)

Definice určitého integrálu.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Často se také používá zjednodušeného zápisu $F(b^-) = \lim_{x\to b^-} F(x)$ a podobně s $F(a^+)$.

Per partes a substituce pro určitý integrál.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t. = \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plocha pod křivkou. Plocha pod křivkou $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ má orientovaný obsah $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. (U orientovaného obsahu počítáme část pod osou x se záporným znaménkem.) Je-li křivka dána parametricky $y = \psi(t)$, $x = \phi(t)$ pro $t \in [a, b]$, pak máme orientovaný obsah $\int_a^b \psi(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t$. Pro křivku v polárních souřadnicích $r = r(\vartheta)$, $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ je obsah oblasti mezi křivkou a středem souřadnic roven $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$.

Délka křivky. Křivka $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ má délku $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Parametricky zadaná křivka (jako výše) má délku $\int_a^b \sqrt{(\psi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$. V polárních souřadnicích má pak délku $\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\vartheta) + (r'(\vartheta))^2}\,\mathrm{d}\vartheta$.

Objem a povrch rotačního tělesa. Rotační těleso vzniklé rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x, $x \in [a, b]$, má objem $\int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x$ a povrch $\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

Guldinovo pravidlo pro objemy. Objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinné množiny M kolem přímky p, neprotínající množinu M, je roven součinu obsahu množiny M a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny M od p.

Guldinovo pravidlo pro povrchy. Povrch rotační plochy vytvořené rotací rovinné křivky kolem přímky p je rovna součinu délky křivky a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky od p.