Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Rozmyslete si, že dané funkce mají totální diferenciál v bodě $(x, y) = (0, 0)$ a napište jeho koeficienty.

a) $(1+x)^k(1+y)^\ell$, kde $k, \ell \in \mathbb{N}$ jsou parametry.

b) $\ln(1+x)\ln(1+y)$

c) $(1+x)^{1+y}$

Úloha 2: Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$f(x, y) = \sqrt{|x||y|}.$$

Uvědomte si, že f je spojitá v bodě $(0, 0)$, spočítejte v tomto bodě $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$. Dokažte však, že f nemá v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál.

Úloha 3: Mějme funkci $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanou jako

$$H(r, \alpha) = xe^{x+y},$$

kde $x = r\cos\alpha$ a $y = r\sin\alpha$.

a) Spočtěte $\frac{\partial H}{\partial r}$ a $\frac{\partial H}{\partial \alpha}$, ideálně pomocí řetízkového pravidla.

b) Určete totální diferenciál funkce H.

c) Pro ε malé odhadněte $H(1+\varepsilon, \varepsilon)$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 4: Funkce $y = y(x)$ splňuje $yx = 1$. Spočtěte derivaci y pomocí věty o implicitních funkcích.

Úloha 5: Funkce $z = z(x, y)$ splňuje rovnici $z^3 - 3xyz = a^3$. Spočtěte parciální derivace z.

Úloha 6: Asteroida je dána rovnicí $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Zjistěte v okolí kterých bodů je tato křivka grafem funkce. Spočtěte její derivaci.

Úloha 7: Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

a) Dokažte, že tímto vztahem je definovaná hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$ splňující $z(1, -2) = 1$.

b) Určete $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U.

c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[1, -2]$.

Úloha 8: Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$. Dokažte, že

a) tímto vztahem je definovaná hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$.

b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.