Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Vyřešte:

a) Který obdélníků o obvodu l má největší obsah?

b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

c) Z čtvercového listu papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstřihnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?

d) Jak velkého sněhuláka (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr? Tip: použijte Jensenovu nerovnost. Pro konvexní funkci f a čísla α_i, x_i taková, že $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ platí, že

$$f(\sum_i \alpha_i x_i) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i)\,.$$

e) Z chodby o šířce A odbočuje chodba o šířce B. S jak dlouhou tyčí je možné zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

Úloha 2: Dokažte a zapamatujte si následující nerovnosti:

a) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \geq 1 + x$.

b) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \leq x$.

c) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$. Ekvivalentně: $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1+x}$.

d) pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin x \leq x$.

Úloha 3: Dokažte, že $(1 + 1/x)^x$ je rostoucí funkce (pro $x \in \mathbb{R}^+$).

Úloha 4: Nechť $P(x)$ je polynom stupně $n \geq 1$ s kořenem c, tj. $P(c) = 0$. Dokažte, že $P(x) = (x - c)Q(x)$, kde Q je nějaký polynom stupně $n - 1$.

Úloha 5: Nechť

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

je polynom stupně n celými koeficienty (tj. všechna a_i jsou celá). Předpokládejme, že $P(x)$ má racionální kořen $c = \frac{p}{q}$, kde $\frac{p}{q}$ je zlomek v základním tvaru. Dokažte, že a_0 je dělitelné p a a_n je dělitelné q.

Úloha 6: Následující funkce rozložte na parciální zlomky.

a) $\frac{1}{x(x-1)}$

b) $\frac{4}{(x+2)(2x+1)}$

c) $\frac{x+1}{x^2+x-6}$

d) $\frac{x^3}{(x-2)^2}$

e) $\frac{1}{6x^3-19x^2+2x+3}$

f) $\frac{2x+5}{x^3-6x^2-6x-7}$