

Úlohy k cvičení 7  
L' Hospitalovo pravidlo, průběh funkcí

1. Spočtěte následující limity

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$ ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)}$ ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ ;

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$ ;

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ ;

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ ;

(h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ ;

(i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2}$ ;

(j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ;

(k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}$ ;

(l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x}$ ;

(m)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ ;

(n)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$ ;

(o)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ ;

2. Najděte maximum funkce  $x^{1/x}$  na svém definičním oboru.

3. Vyšetřete průběh následujících funkcí včetně určování asymptot a limit v krajních bodech definičního oboru (nemusíte vyšetřovat konvexitu). Načrtněte jejich grafy.

(a)  $f(x) = \sin(\sin x)$ ;

(b)  $f(x) = \sin(\pi \sin x)$ ;

(c)  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$  (u této varianty extrémy nejspíš neurčíte přesně, pokuste se alespoň odhadnout jejich polohu);

(d)  $f(x) = 2x^2(x - \sqrt{x^2 - 1})$ ;

(e)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{|x|+2/(3\pi)}\right)$ .

4. Vyšetřete průběh následujících funkcí včetně určování asymptot a limit v krajních bodech definičního oboru a konvexitu. Načrtněte jejich grafy.

(a)  $f(x) = x^3 - 12x + 16$ ;

(b)  $f(x) = \arcsin(\cos x)$ ;

- (c)  $f(x) = \ln^3(x)$ ;
- (d)  $f(x) = e^{-x^2}$ ;
- (e)  $f(x) = \ln(4 \cdot 3^x + 2)$ ;
- (f)  $f(x) = \ln(|\operatorname{tg} x|)$ ;
- (g)  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ ;
- (h)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ ;
- (i)  $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ ;
- (j)  $f(x) = x - \ln(x+1)$ ;
- (k)  $f(x) = x \cdot e^{-|x-1|}$ .