

# Úlohy k cvičení 6

Pár dalších příkladů na limity posloupností a derivace

## Připomenutí vzorečků:

- $(f + g)' = f' + g'$ ;
- $(cf)' = c \cdot f'$  pro  $c \in \mathbb{R}$ ;
- $(fg)' = f'g + g'f$ ;
- $(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ ;
- $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ ;
- $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$ .
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  (pokud dává smysl);
- $(e^x)' = e^x$ ;
- $(\sin x)' = \cos x$ ;
- $(\cos x)' = -\sin x$ ;
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  (pro  $x > 0$ );
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .

1. Spočítejte následující limity posloupností.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1 + 1/n)$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\operatorname{arctg}(n))$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(n^2)$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-5}}{\sqrt{5n-1} - \sqrt{5n-3}}$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n)$ ;

2. Ověřte podle definice, že

- $(e^x)' = e^x$ ;
- $(\sin x)' = \cos x$ .

3. Určete derivace funkcí (v bodech kde existují)

- $\frac{x-1}{x+1}$ ;
- $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ ;
- $\frac{2}{(x^2-1)^3}$ ;
- $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ ;
- $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ;
- $\sqrt{1 - \ln x}$ ;
- $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ;
- $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ;
- $x^2 \sqrt{\ln x - 1}$ ;
- $\ln(\ln(\ln(x)))$ ;
- $\ln(1 + e^{-x^2})$ ;
- $\sqrt{\sin x}$ ;
- $\cos \sqrt{x-1}$ ;

- (n)  $\cos^7(2x)$ ;
- (o)  $\sin \sqrt{x+2}$ .

4. Pomocí vzorečku pro derivaci inverzní funkci

- (a) ověřte  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;
- (b) ověřte  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ;
- (c) spočtěte  $(\arcsin x)'$ ;
- (d) spočtěte  $(\arccos x)'$ .

5. Určete derivace funkcí (v bodech kde existují)

- (a)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ;
- (b)  $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$ ;
- (c)  $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ ;
- (d)  $\operatorname{arctg}(x^2)$ ;
- (e)  $\arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ;
- (f)  $\operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ;
- (g)  $\ln(\cos x)$ ;
- (h)  $\ln(-2 + \cos x)$ ;
- (i)  $\ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{x}))$ ;
- (j)  $e^{\sqrt{x+1}}$ ;
- (k)  $x^x$ ;
- (l)  $x^{\sqrt{x}}$ ;
- (m)  $x^{\frac{1}{x}}$ ;
- (n)  $x^{\ln x}$ ;
- (o)  $|x|$ ;
- (p)\*  $x \cdot |x|$ ;
- (q)  $\ln |x|$ ;
- (r)\*  $|\sin^3 x|$ ;
- (s)\*  $|(x-1)^2(x+1)^3|$ ;
- (t)\*  $\arcsin(\sin x)$ ;

(u)\* funkce  $f$  zadané předpisem  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$