

Úlohy k cvičení 5

Limity funkcí

Pár základních limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

Věta (o limitě složené funkce). Necht' $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ a necht' g a f jsou reálné funkce reálné proměnné splňující $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ a $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = c$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c,$$

pokud je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P1) $f(y)$ je spojitá v bodě b .

(P2) Na nějakém prstencovém okolí P bodu a funkce g nenabývá hodnotu b .

1. Spočtěte následující limity:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

(e)* $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

2. U následujících funkcí určete limity ve všech bodech mimo definiční obor a v $\pm\infty$:

(a) $\frac{3x^2 + 1}{2x^2 + 1}$.

(b) $\frac{2x^2 + 1}{x^3 + 1}$.

(c) $\frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

(d) $\frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

3. Spočtěte limity:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$.

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$.

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}(x))}.$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin(\pi x)}.$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + \sin x}.$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x}.$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sqrt{x}}.$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{x}.$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - \cos x}{\sqrt{x}}.$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}.$$

4.* Pomocí jedné ze základních limit odvoďte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

5. Rozhodněte, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x^2 + 4}\right).$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin(1/x))}{x \sin(1/x)}.$$