

## Úlohy k cvičení 2

Suprema a infima a spočetnost.

**Definice.** Je-li  $M \subseteq \mathbb{R}$ , potom *supremum* množiny  $M$  je nejmenší takové reálné číslo  $s$ , že  $s \geq m$  pro každé  $m \in M$ . Pokud  $M$  není shora omezená, potom supremum  $M$  definujeme jako  $\infty$ . Dále *infimum*  $M$  je největší takové reálné číslo  $i$ , že  $i \leq m$  pro každé  $m \in M$ . Pokud  $M$  není zdola omezená, potom infimum  $M$  definujeme jako  $-\infty$ .

V řešení úloh (zejména u první úlohy) můžete využívat, že každá shora omezená podmnožina reálných čísel má reálné supremum a každá zdola omezená podmnožina reálných čísel má reálné infimum. Dále u první úlohy můžete používat, že pro libovolné  $a, b \in \mathbb{R}$  takové, že  $a < b$  existuje  $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ .

**Definice.** Množina  $X$  je *spočetná* pokud existuje prostá funkce  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ . V opačném případě je  $X$  *nespočetná*.

1. V oboru reálných čísel určete suprema a infima následujících množin (pokud existují). Jsou to zároveň maxima či minima těchto množin?

(a)  $\{1/n: n \in \mathbb{N}\}$ ,

(b)  $\{-1/n: n \in \mathbb{N}\}$ ,

(c)  $\{0, 3; 0, 33; 0, 333; 0, 3333; \dots\}$ ,

(d)  $\{q \in \mathbb{Q}: q < \sqrt{3}\}$ ,

(e)  $\{\sin x: x \in [0, 2\pi)\}$ ,

(f)  $\{\sin x: x \in (0, 2\pi)\}$ ,

(g)  $\{\sin x: x \in (0, \pi)\}$ ,

(h)  $\{1 - 1/n^2: n \in \mathbb{N}\}$ ,

(i)  $\{\frac{z-1}{z}: z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

(j)\*  $\{\frac{m}{m+n}: m, n \in \mathbb{N}\}$

(k)  $\{\frac{n+(-1)^n}{n}: n \in \mathbb{N}\}$

(l)  $\{n^{(-1)^n}: n \in \mathbb{N}\}$

(m)  $\{n^2 - m^2: n, m \in \mathbb{N}\}$ ,

(n)\*  $\{n^2 - m^2: n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$ ,

(o)  $\{n^2 - m^2: n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ ,

(p)  $\{2^{-n} + 3^{-n}: n \in \mathbb{N}\}$ ,

(q)  $\{2^{-n} + 3^{-n}: n \in \mathbb{Z}\}$ ,

(r)\*  $\{5^{(-1)^j 3^k}: j, k \in \mathbb{Z}\}$ ,

(s)  $\{\cos((1 + 1/n)\pi): n \in \mathbb{N}\}$ ,

(t)\*  $\{\cos((1 + 1/n)\pi): n \in \mathbb{N}, n \text{ sudé}\}$ ,

(u)  $\{\cos((1 + 1/n)\pi): n \in \mathbb{N}, n \text{ liché}\}$ ,

(v)\*\*\*  $\{\sin n: n \in \mathbb{N}\}$  (můžete využívat, že  $\pi$  je iracionální číslo).

2. Ukažte, co nejpořádněji, že každý otevřený interval  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  obsahuje racionální číslo.
3. O následujících množinách ukažte, že jsou spočetné:
  - (a)  $\mathbb{Z}$
  - (b)  $\mathbb{N}^2$
  - (c)  $\mathbb{Q}$
4. S využitím faktu, že  $\mathbb{R}$  je nespočetná, ukažte, že množina iracionálních čísel  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  je též nespočetná.
- 5.\*\* Necht'  $X$  je množina. Ukažte, že neexistuje prostá funkce  $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ .