Úlohy k cvičení 14

Délka křivky, rotační tělesa.

Délka grafu funkce f na intervalu (a, b):

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$

Délka křivky zadané parametricky $(\psi(t), \varphi(t))$ pro $t \in (a, b)$:

$$\int_a^b \sqrt{(\psi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

Povrch rotačního tělesa vzniklého rotací funkce f na intervalu (a, b):

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$

Objem téhož rotačního tělesa:

$$\int_a^b \pi f^2(x)\, \mathrm{d}x$$

1. Určete:
   (a) Obvod kružnice s poloměrem r.
   (b) Délku křivky $y = x^{3/2}$ pro $x \in [0, a]$.
   (c) Délku křivky $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x$ pro $x \in [0, e]$.
2. Určete objem:
   (a) Válce s výškou v a poloměrem podstavy r.
   (b) Kužele s výškou v a poloměrem podstavy r.
   (c) Koule s poloměrem r.
   (d) Nekonečného trychtýře vzniklého rotací $f(x) = \frac{1}{x}$ kolem osy x pro $x \in [1, \infty]$.
   (e) Rotačního tělesa vzniklého rotací funkce $y = \sqrt[3]{x}$ pro $y \in [1, 2]$ kolem osy y.
3. Určete povrch:
   (a) Válce s výškou v a poloměrem podstavy r.
   (b) Kužele s výškou v a poloměrem podstavy r.
   (c) Koule s poloměrem r.
   (d) Paraboloidu vzniklého rotací křivky $y = c\sqrt{x}$ kolem osy x pro $x \in [0, b]$.