

Úlohy k cvičení 1

Rovnice, nerovnice, grafy funkcí, výroky nad reálnými čísly, vlastnosti funkcí

1. Řešte následující rovnice a nerovnice nad \mathbb{R} :

(a) $\log(x^2 - 25) = \log(2x + 10)$

(b) $\log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x)$

(c) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$

(d) $\frac{x^4-x-2}{x(x-1)} = 1$

(e) $||x - 2| + 1| \leq 5$

(f) $\sin(2x) = \sin(x)$

(g) $\sin(3x - 2) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Nakreslete co nejpřesněji grafy následujících funkcí:

(a) $\cos x, \cos 2x, \cos(x + \pi), \cos(2x + \pi)$.

(b) $||x - 1| - 1|, ||x - 1| - 1|^2, ||x - 1|^2 - 1|$.

(c) $\sin |x|, |\sin x|$.

(d) $\sqrt{1 - x^2}$.

(e) $\sin x \cos x$.

(f)* $\sin x^2, \sin 1/x, \ln \sin x, \ln \ln \sin x$.

(g)* $x + 1/x$.

3. U každého z následujících výroků nejprve zformulujte jeho negaci. Poté rozhodněte, zdali platí původní výrok, nebo jeho negace.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x^2 + y^2 \geq 0$,

(b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: x < n$,

(c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: (x \geq n) \vee (x < n + 1)$,

(d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{Z}: (x \geq n) \vee (x < n + 1)$,

(e) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon$,

(f) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$,

(g) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$,

(h) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{R}: z > x \Rightarrow y < z$,

(i) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$.

4. Dokažte následující nerovnosti:

(a) $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a + b| \leq |a| + |b|$

(b) $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a| - |b| \leq |a - b|$

5. Najděte funkci, která zobrazuje:

(a) Interval $(0, 1)$ na interval $(0, \infty)$.

(b) Interval $(0, 1)$ na interval $(-\infty, \infty)$.

- (c) Interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$.
 - (d) Interval $[0, 1]$ na interval $(0, 1)$.
 - (e) Interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$.
 - (f) Interval $(0, \infty)$ na interval $(0, 1)$.
6. Necht' $f: X \rightarrow Y$ je libovolné zobrazení a $A, B \subseteq X$ jsou libovolné množiny.
- (a) Jaký je vztah mezi množinami A a $f^{-1}(f(A))$?
 - (b) Jaký je vztah mezi množinami $f(A \cup B)$ a $f(A) \cup f(B)$?
 - (c) Jaký je vztah mezi množinami $f(A \cap B)$ a $f(A) \cap f(B)$?
7. Charakterizujte zobrazení $f: X \rightarrow Y$, pro která platí:
- (a) $f^{-1}(f(A)) = A$ pro každé $A \subseteq X$.
 - (b) $f(f^{-1}(B)) = B$ pro každé $B \subseteq Y$.