Úlohy k cvičení 9

L' Hospitalovo pravidlo, průběh funkcí

1. Spočtěte následující limity
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$;
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$;
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)}$;
   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$;
   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$;
   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$;
   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$;
   (h) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$;
   (i) $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-x^2}$;
   (j) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;
   (k) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}$;
   (l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x}$;
   (m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$;
   (n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$;
   (o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$;
2. Najděte maximum funkce $x^{1/x}$ na svém definičním oboru.
3. Vyšetřete průběh následujících funkcí včetně určování asymptot a limit v krajních bodech definičního oboru (nemusíte vyšetřovat konvexitu). Načrtněte jejich grafy.
   (a) $f(x) = \sin(\sin x)$;
   (b) $f(x) = \sin(\pi \sin x)$;
   (c) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ (u této varianty extrémy nejspíš neurčíte přesně, pokuste se alespoň odhadnout jejich polohu);
   (d) $f(x) = 2x^2(x - \sqrt{x^2-1})$;
   (e) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{|x|+2/(3\pi)}\right)$.
4. Vyšetřete průběh následujících funkcí včetně určování asymptot a limit v krajních bodech definičního oboru a konvexity. Načrtněte jejich grafy.
   (a) $f(x) = x^3 - 12x + 16$;
   (b) $f(x) = \arcsin(\cos x)$;

(c) $f(x) = \ln^3(x)$;

(d) $f(x) = e^{-x^2}$;

(e) $f(x) = \ln(4 \cdot 3^x + 2)$;

(f) $f(x) = \ln(|\operatorname{tg} x|)$;

(g) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$;

(h) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

(i) $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$;

(j) $f(x) = x - \ln(x+1)$;

(k) $f(x) = x \cdot e^{-|x-1|}$.