Úlohy k cvičení 2

Výroky nad (převážně) reálnými čísly, suprema a infima.

Definice. Je-li $M \subseteq \mathbb{R}$, potom *supremum* množiny M je nejmenší takové reálné číslo s, že $s \geq m$ pro každé $m \in M$. Pokud M není shora omezená, potom supremum M definujeme jako ∞. Dále *infimum* M je největší takové reálné číslo i, že $i \leq m$ pro každé $m \in M$. Pokud M není zdola omezená, potom infimum M definujeme jako $-\infty$.

V řešení úloh (zejména u první úlohy) můžete využívat, že každá shora omezená podmnožina reálných čísel má reálné supremum a každá zdola omezená podmnožina reálných čísel má reálné infimum. Dále můžete používat, že pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $a < b$ existuje $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$.

Definice. Množina X je *spočetná* pokud exstuje prostá funkce $f\colon X \to \mathbb{N}$. V opačném připadě je X *nespočetná*.

1. V oboru reálných čísel určete suprema a infima následujících množin (pokud existují). Jsou to zároveň maxima či minima těchto množin?
   (a) $\{1/n\colon n \in \mathbb{N}\}$,
   (b) $\{-1/n\colon n \in \mathbb{N}\}$,
   (c) $\{0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; \dots\}$,
   (d) $\{q \in \mathbb{Q}\colon q < \sqrt{3}\}$,
   (e) $\{\sin x\colon x \in [0, 2\pi)\}$,
   (f) $\{\sin x\colon x \in (0, 2\pi)\}$,
   (g) $\{\sin x\colon x \in (0, \pi)\}$,
   (h) $\{1 - 1/n^2\colon n \in \mathbb{N}\}$,
   (i) $\left\{\frac{z-1}{z}\colon z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
   (j)* $\left\{\frac{m}{m+n}\colon m, n \in \mathbb{N}\right\}$
   (k) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\}$
   (l) $\left\{n^{(-1)^n}\colon n \in \mathbb{N}\right\}$
   (m) $\{n^2 - m^2\colon n, m \in \mathbb{N}\}$,
   (n)* $\{n^2 - m^2\colon n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$,
   (o) $\{n^2 - m^2\colon n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$,
   (p) $\{2^{-n} + 3^{-n}\colon n \in \mathbb{N}\}$,
   (q) $\{2^{-n} + 3^{-n}\colon n \in \mathbb{Z}\}$,
   (r)* $\left\{5^{(-1)^j 3^k}\colon j, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
   (s) $\left\{\cos((1 + 1/n)\pi)\colon n \in \mathbb{N}\right\}$,
   (t)* $\left\{\cos((1 + 1/n)\pi)\colon n \in \mathbb{N}, n \text{ sudé}\right\}$,
   (u) $\left\{\cos((1 + 1/n)\pi)\colon n \in \mathbb{N}, n \text{ liché}\right\}$,
   (v)*** $\{\sin n\colon n \in \mathbb{N}\}$ (můžete využívat, že π je iracionální číslo).

2. O následujících množinách ukažte, že jsou spočetné:
   (a) $\mathbb{Z}$
   (b) $\mathbb{N}^2$
   (c) $\mathbb{Q}$
3. S využitím faktu, že $\mathbb{R}$ je nespočetná, ukažte, že množina iracionálních čísel $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je též nespočetná.
4.** Nechť X je množina. Ukažte, že neexistuje prostá funkce $f\colon \mathcal{P}(X) \to X$.
5. Ukažte, co nejpořádněji, že každý otevřený interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ obsahuje racionální číslo.
6. U každého z následujících výroků nejprve zformulujte jeho negaci. Poté rozhodněte, zdali platí původní výrok, nebo jeho negace.
   (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x^2 + y^2 \geq 0$,
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon x < n$,
   (c) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon (x \geq n) \vee (x < n + 1)$,
   (d) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{Z}\colon (x \geq n) \vee (x < n + 1)$,
   (e) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon$,
   (f) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon z > x \Rightarrow y < z$,
   (g) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon z > x \Rightarrow y < z$,
   (h) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{R}\colon z > x \Rightarrow y < z$,
   (i) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon z > x \Rightarrow y < z$.