Úlohy k cvičení 10

Taylorův polynom, základní integrály

Definice. Nechť f je funkce definovaná na otevřeném intervalu I a $b \in I$. Předpokládejme, že f má v b vlastní n-tou derivaci. Potom *Taylorův polynom funkce f v bodě b řádu n* je definován jako

$$T_n^{f,b}(x) := f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(x-b)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n.$$

Významné integrály:

$f(x)$	$F(x)$	interval
x^a, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ pro } a \in \mathbb{Z} \\ (0,\infty) \text{ jinak} \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)^*$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$(-1, 1)$

* Konstanta může být jiná na každém z intervalů.

1. Napište Taylorův polynom v nule (stupně např. 5) pro následující funkce.
   (a) e^x;
   (b) $\ln(x+1)$;
   (c) $\sin x$;
   (d) $\cos x$;
   (e) $(1+x)^a$ pro $a \in \mathbb{R}$.
2. Spočtěte následující integrály a určete intervaly, na kterých je výsledek platný.
   (a) $\int x^3 + 2x^2 + \frac{x}{17} \, \mathrm{d}x$
   (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} + \frac{1}{x} - 3\cos x \, \mathrm{d}x$
   (c)* $\int \sqrt{x^6} \, \mathrm{d}x$
   (d) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$
3. Spočtěte následující integrály. Nezapomeňte určit interval, na kterém je výsledek platný.
   (a) $\int \sqrt[3]{1-3x} \, \mathrm{d}x$
   (b) $\int \sin^7 x \cos x \, \mathrm{d}x$
   (c) $\int x e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$
   (d) $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$
   (e) $\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x$
   (f) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} \, \mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{x}{1+x^4}\ \mathrm{d}x$

(h) $\int \frac{1}{x \ln x}\ \mathrm{d}x$

(i) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x$

(j) $\int \sin^{2k+1} x\ \mathrm{d}x$ pro $k \in \mathbb{N}$

(k) $\int \cos^{2k+1} x\ \mathrm{d}x$ pro $k \in \mathbb{N}$