

Úlohy k cvičení 9

Aplikace derivací

1. Spočtěte následující limity

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln x} (2 + 3x^3)$;

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$;

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$;

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$;

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$;

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$;

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2}$;

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}$;

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x}$;

(m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$;

(n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$;

(o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$;

2. Pomocí derivací zjistěte:

(a) Který z obdélníků o obvodu ℓ má největší obsah?

(b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

(c) Z čtvercového papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké máme odstříhnout čtverce v rozích, aby krabička měla co největší objem.

3. Dokažte následující nerovnosti:

(a) $e^x \geq x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\ln x \leq x - 1$ pro $x \in (0, \infty)$;

(c) $\sin x \leq x$ pro $x \geq 0$;

(d) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

4. Najděte maximum funkce $x^{1/x}$ na svém definičním oboru.

5. Nalezněte globální a lokální extrémů funkcí a načrtněte jejich grafy.

(a) $f(x) = \frac{2x-1}{|x-1|^2}$

(b) $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

(c) $f(x) = \ln(|x| - x^2)$

(d) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$