

Úlohy k cvičení 8

Derivace

Připomenutí vzorečků:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(cf)' = c \cdot f'$ pro $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + g'f$;
- $(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$;
- $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$;
- $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$.
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (pokud dává smysl);
- $(e^x)' = e^x$;
- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (pro $x > 0$);
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Ověřte podle definice, že

(a) $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro n přirozené;

(b) $(e^x)' = e^x$;

(c) $(\sin x)' = \cos x$.

2. Určete derivace funkcí (v bodech kde existují)

(a) $\frac{x-1}{x+1}$;

(b) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$;

(c) $\frac{2}{(x^2-1)^3}$;

(d) $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$;

(e) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

(f) $\sqrt{1 - \ln x}$;

(g) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$;

(h) $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;

(i) $x^2 \sqrt{\ln x - 1}$;

(j) $\ln(\ln(\ln(x)))$;

(k) $\ln(1 + e^{-x^2})$;

(l) $\sqrt{\sin x}$;

(m) $\cos \sqrt{x-1}$;

(n) $\cos^7(2x)$;

(o) $\sin \sqrt{x+2}$.

3. Pomocí vzorečku pro derivaci inverzní funkce

(a) ověřte $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

(b) ověřte $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

(c) spočtěte $(\arcsin x)'$;

(d) spočtěte $(\arccos x)'$.

4. Určete derivace funkcí (v bodech kde existují)

(a) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

(b) $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$;

(c) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;

(d) $\operatorname{arctg}(x^2)$;

(e) $\arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

(f) $\operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$;

(g) $\ln(\cos x)$;

(h) $\ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{x}))$;

(i) $e^{\sqrt{x+1}}$;

(j) x^x ;

(k) $x^{\sqrt{x}}$;

(l) $x^{\frac{1}{x}}$;

(m) $x^{\ln x}$;

(n) $|x|$;

(o)* $x \cdot |x|$;

(p) $\ln |x|$;

(q)* $|\sin^3 x|$;

(r)* $|(x-1)^2(x+1)^3|$;

(s)* $\arcsin(\sin x)$;

(t)* funkce f zadané předpisem $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$